UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

E.mail : office@ucad.edu.sn

site web : officedubac.sn

2021 G 18 BIS A N°1

Durée : 4 heures

Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

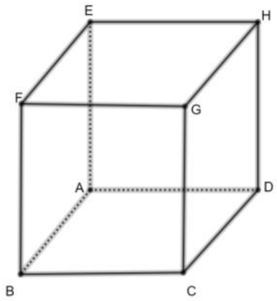
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

CORRIGE

EXERCICE 1 (5 points)



Partie A

1. La figure $ABCDEFGH$ ci-contre est un cube.

a) Reproduisons la figure et montrer que la droite (BD) est perpendiculaire au plan (ACG). **0,25 pt**

Pour la reproduction vérifier que AD = BC = 4cm et que BCGF est un carré de même ADHE.

La droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC) et elle est orthogonale à la droite (CG). Donc (BD) est perpendiculaire au plan (ACG)

b) Montrons que la droite (BE) est perpendiculaire au plan (AFG). **0,25 pt**

La droite (BE) est perpendiculaire à la droite (AF) et elle est orthogonale à la droite (FG). Donc (BE) est perpendiculaire au plan (AFG)

c) Déduisons-en que les positions relatives de (AG) et (BD) ; (AG) et (BE) et (AG) et (BDE). **0,25 pt**

La droite (BD) est perpendiculaire au plan (ACG) donc elle orthogonale à toute droite du plan (ACG). Donc (BD) est orthogonale à la droite (AG) ;

La droite (BE) est perpendiculaire au plan (AFG) donc elle orthogonale à toute droite du plan (AFG). Donc (BE) est orthogonale à la droite (AG)

La droite (AG) est orthogonale à la droite (BE) et (AG) est orthogonale à la droite (BD) donc (AG) est perpendiculaire au plan (BDE)

d) Donnons la nature exacte du triangle BDE et justifions la réponse. **0,25 pt**

Le triangle BDE est équilatéral car $BD = BE = DE$.

e) Donnons la nature exacte de$EACG$ et justifions la réponse. **0,25 pt**

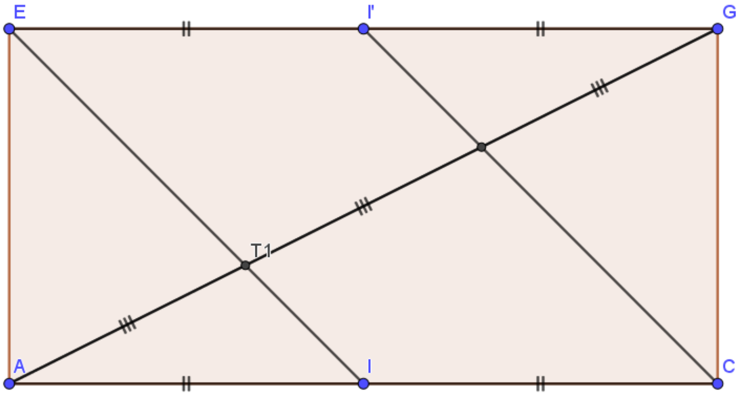
Le EACG est un rectangle. Les 4 points sont coplanaires avec 4 angles droits.

2. Soit T le centre de gravité du triangle BDE et I le point d'intersection de la droite (ET) et de la droite (BD).

a) Montrons que I est le milieu du segment $[AC]$ et que les droites (ET) et (AG) sont coplanaires.
0,25 pt+0,25 pt

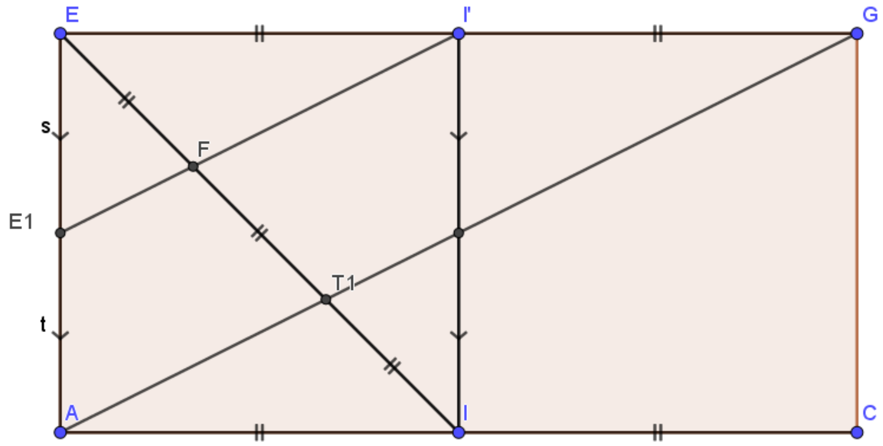
T est le centre de gravité du triangle BDE, le point d'intersection de la droite (ET) et de la droite (BD) est donc le milieu de [BD]. Or $ABCD$ est un carré donc le milieu de $[BD]$ est le milieu de $[AC]$. Donc I est le milieu du segment $[AC]$

b) On pose T_1 le point d'intersection de (EI) et (AG). Montrer que $AT_1 = \frac{1}{3}AG$. **0,25 pt**



D'après le théorème de Thales $AT_1 = \frac{1}{3}AG$

c) En déduire que $T = T_1$ · **0,25 pt**



D'après le théorème de Thales $IT_1 = \frac{1}{3}IE \quad T_1 \in [IE]$

T est centre de gravité donc $IT = \frac{1}{3}IE, T \in [IE]$

Donc $T_1 = T$

Partie B

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. Soit I, J et K les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

a) Donnons les coordonnées des points I, J et K puis montrons que les points I, J et K définissent un plan.

$\mathrm{I}(0;\frac{3}{4};0)$, $\mathrm{J}(0;\frac{3}{4};1)$, $\mathrm{K}(1;\frac{1}{2};0)$. **0,25 pt**

Les points I, J et K ne sont pas alignés donc ils définissent un plan. **0,25 pt**

b) Montrons que le vecteur $\vec{n}(1;4;0)$ est normal au plan (IJK).

$\vec{n}.\overrightarrow{IJ} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{IK} = 0$, donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, par conséquent $\vec{n}$ est normal au plan (IJK). **0,25 pt**

c) Déterminons une équation cartésienne du plan (IJK).

Soit $\mathrm{M}(x,y,z) \in (\mathrm{IJK})$, on a :$x_{\vec{n}}x + y_{\vec{n}}y + z_{\vec{n}}z + \mathrm{d} = 0$ avec $\mathrm{d} \in IR$,

$x + 4y + \mathrm{d} = 0$ de plus $x_I + 4y_I + \mathrm{d} = 0$, donc $\mathrm{d} = -3$.

Par conséquent $(\mathrm{IJK})\colon x + 4y - 3 = 0$. **0,25 pt**

d) Justifions que les points A, I, J et K sont les sommets d'un tétraèdre puis calculons le volume de ce tétraèdre.

Le point A n'appartient pas au plan (IJK), donc les points A, I, J et K sont les sommets d'un tétraèdre. **0,25 pt**

Son volume est : $\mathrm{V} = \frac{1}{6}\left\|(\overrightarrow{\mathrm{AI}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AJ}}).\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right\| = \frac{1}{8}\mathrm{cm}^3$. **0,5 pt**

Nota Bene : On peut montrer que $(\overrightarrow{\mathrm{AI}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AJ}}).\overrightarrow{\mathrm{AK}} \neq 0$ pour justifier que les les points A, I, J et K sont les sommets d'un tétraèdre.

2. Soit M un point de la droite (IJ).

a) Montrons que M a pour coordonnées $(0\,; \frac{3}{4}\,;\, \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit (x,y,z) le triplet de coordonnées de M.

$\mathrm{M}(x,y,z) \in (IJ) \Rightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{IJ}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - \frac{3}{4} = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Donc M a pour coordonnées $(0\,; \frac{3}{4}\,;\, \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. **0,25 pt**

b) Déterminons l'aire $\mathrm{A}(\alpha)$ du triangle AKM en fonction de α.

On a :$\mathrm{A}(\alpha) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{AM}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2 + \frac{9}{16}}$. **0,5 pt**

c) Déterminons le point M_0 en lequel $\mathrm{A}(\alpha)$ atteint son minimum.

La fonction $\alpha \to A(\alpha)$ est dérivable sue $\mathbb{R}$ et $A'(\alpha) = \dfrac{5\,\alpha}{8 \times \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2 + \frac{9}{16}}}$.

$A'(\alpha)$ s'annule et change de signe au point $\alpha = 0$, donc $A(\alpha)$ atteint son minimum au point $\mathrm{M}_0(0;\frac{3}{4};0)$.

Par conséquent $\mathrm{M}_0 = \mathrm{I}$. **0,5 pt**

EXERCICE 2 (3,5 points)

*On se propose de déterminer l'ensemble **S** des entiers relatifs n vérifiant le système :*

$$\begin{cases} n \equiv 4[12] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$$

1. *On considère l'équation suivante* $(\boldsymbol{E}) : 12u + 11v = 1$.

a) *Sans exhiber une solution, justifions l'existence d'un couple d'entiers relatifs* (u, v) *solution de* $(\boldsymbol{E})$**.**

Les nombres 11 et 12 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout ,

il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\ v)$ tel que $12u + 11v = 1$. **0,5 pt**

b) Déterminons un couple $(u_0\,; v_0)$ solution de $(\boldsymbol{E})$.

Le couple $(1\,; -1)$ est solution de $(\boldsymbol{E})$. **0,5 pt**

2. *Montrons que pour tout couple* $(u\,; v)$ *vérifiant* $(\boldsymbol{E})$, l'entier $3 \times 12u + 4 \times 11v$ *appartient à **S**.*

Soit $(u\,;\ v)$ une solution de $(\boldsymbol{E})$.

$$3 \times 12u + 4 \times 11v - 3 = 3 \times (12u - 1) + 4 \times 11v$$

$$= 3 \times (-11v) + 4 \times 11v$$

[D'après(**E**)] $= 11v$

$$\equiv 0\ [11]$$

De même,

$$3 \times 12u + 4 \times 11v - 4 = 3 \times 12u + 4 \times (11v - 1)$$

$$= 3 \times 12\,u - 4 \times 12u$$

[D'après(**E**)] $= -12u$

$$\equiv 0\ [12]$$ **0,5 pt**

3. *Soit n un entier relatif appartenant à S*. On pose $n_0 = 3 \times 12u_0 + 4 \times 11v_0$ ·

a) *Démontrons que* $n - n_0 \equiv 0[132]$.

On a : $\begin{cases} n \equiv 4\ [12] \\ n_0 \equiv 4\ [12] \end{cases}$ et $\begin{cases} n \equiv 3\ [11] \\ n_0 \equiv 3\ [11] \end{cases}$

En faisant les différences membre à membre, on en d´déduit $n - n_0$ est un multiple de 12 et de 11. Il existe alors des entiers p et q tels que :

$$n - n_0 = 12p = 11q.$$

D'après le théorème de Gauss, on d´déduit de cette relation, puisque 11 divise 12p et est premier avec 12, que 11divise p : il existe un entier p' tel que $p = 11p'$.

Ainsi, $n - n_0 = 12p = 12 \times 11p' = 132p'$.

Par conséquent, $n - n_0 \equiv 0\ [132]$. **0,5 pt**

b) *Déduisons-en qu'un entier relati*f n *appartient à S si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme* $n = 132k - 8$ où k *est un entier relatif.*

Si un entier relatif n appartient à S, on a d'après les questions précédentes, n ≡ n_0 [132].

L'entier n peut s'écrire donc sous la forme $n = 132k - 8$ où k est un entier relatif.

Réciproquement, s'il existe un entier k tel que $n = 132k - 8$, alors $n = 11 \times 12k - 8$.

On a donc $n \equiv -8$ [11] et $n \equiv -8$ [12].

Comme -8 est congru à 4 modulo 12 à 3 modulo 11, il vient $n \equiv 4$ [12] et $n \equiv 3$[11].

Autrement dit n appartient à S. **0,75 pt**

4. Application

Soit n le nombre de billets achetés par Farba. Les données du problème entrainent :

$$\begin{cases} n \equiv 4[12] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$$

D'après les questions précédentes, il existe un entier k tel que $n = 132k - 8$.

Comme $800 \leq n \leq 1000$, on a $\frac{800+8}{32} \leq k \leq \frac{1000+8}{32}$,

c'est `a dire $6,1212 \leq k \leq 7,6363$;

Etant donné que k est un entier, on a $k = 7$ et $n = 132 \times 7 - 8 = 916$.

Ainsi, Farba a acheté de 916 billets de 1 000 FCFA soit une dépense de 916 000 FCFA. **0,75 pt**

PROBLEME (11,5 points)

Partie A (4,5 points)

Le plan complexe (P)est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

Soit f l'application du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M(z), associe le points M'(z') tel que : $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. Reproduisons et complétons le tableau suivant : **4 x 0,25 = 1 pt**

Valeurs de a	$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$	$a = e^{i\theta}$	$a \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\}$
Nature exacte	Translation	Homothétie	Rotation d'angle θ ($\theta \neq 0$ (2π)	Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre, c'est-à-dire une similitude à centre

1. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives i ,$1 - i$, $2 - 3i$ et $4 - 2i$.

Donnons l'écriture complexe de la similitude plane directe S transformant A en C et B en D, puis précisons sa nature exacte et ses éléments caractéristiques.

L'écriture complexe de S est S: $z' = iz + 3 - 3i$.

La similitude plane directe S est la rotation de centre $\Omega(3)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **0,5 pt**

2. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x, y) vérifiant : $x = (y-5)(y-3)e^{y-3} + 3$.

On désigne par (C_h) l'image de (Γ) par S.

a) Montrons que (C_h) est la courbe de la fonction h définie par :$h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$. **0,5 pt**

L'expression analytique de S est : $\begin{cases} x' = 3 - y \\ y' = x - 3 \end{cases}$. Ce qui équivaut à : $\begin{cases} x = y' + 3 \\ y = 3 - x' \end{cases}$

$M'(x',y') \in (C_h) \Leftrightarrow \exists M(x,y) \in (\Gamma)$ tel que $M' = S(M)$.

$M'(x',y') \in (C_h) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$tel que $\begin{cases} x' = 3 - y \\ y' = x - 3 \\ x = (y-5)(y-3)e^{y-3} + 3 \end{cases}$

$M'(x',y') \in (C_h) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$tel que $\begin{cases} x' = 3 - y \\ y' = x - 3 \\ y' = (x'^2 + 2x')e^{-x'} \end{cases}$

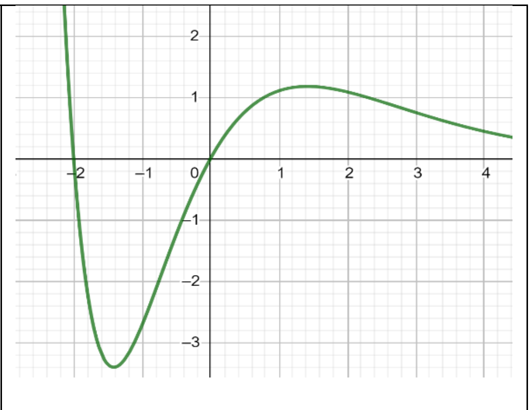
$\Leftrightarrow M' \in (C_h)$ où h est définie par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$. **0,5 pt**

b) Construisons (C_h). **0,5 pt**

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$	$-$	
h	$+\infty$ ↘	↗	↘	0

$h(-\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$

$h(\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$



c) Calculons $I = \int_0^1 h(x)dx$ puis donnons en cm² l'aire de la portion du plan délimitée par (C_h), $(O, \vec{u})$, $(O, \vec{v})$ et la droite d'équation $x = 1$.

A l'aide d'une double intégration par parties, on obtient : $I_1 = 4 - \frac{9}{e}$.

L'aire vaut $\left(4 - \frac{9}{e}\right) \times 1$ cm². **0,5 pt**

3. On pose, pour tout entier naturel n $(n \geq 1)$, $J_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$.

a) Calculons J_1.

Par intégration par parties, on trouve : $J_1 = \frac{e^2-3}{4e^2}$. **0,25 pt**

b) Montrer que : $\forall n \geq 1, J_{n+1} = \frac{n+1}{2} J_n - \frac{1}{2e^2}$.

Le résultat est obtenu à l'aide d'une intégration par parties. **0,25 pt**

c) Déterminer alors J_2, J_3 et J_4. **3 x 0,25 pt = 0,75 pt**

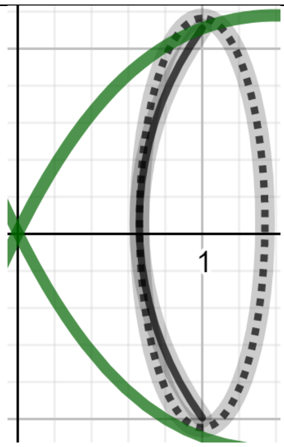
$$J_2 = \frac{1+1}{2} \times J_1 - \frac{1}{2e^2} = \frac{e^2-3}{4e^2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{e^2-5}{4e^2}$$

$$J_3 = \frac{2+1}{2} \times J_2 - \frac{1}{2e^2} = \frac{3}{2} \times \frac{e^2-5}{4e^2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{3e^2-19}{8e^2}$$

$$J_4 = \frac{3+1}{2} \times J_3 - \frac{1}{2e^2} = 2 \times \frac{3e^2-19}{8e^2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{3e^2-21}{4e^2}$$

d) Calculer en cm³ le volume $\mathcal{V}$ du solide engendré par révolution autour de l'axe $(O, \vec{u})$, de la portion de (C_h) comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. **0,75 pt**

$$\mathcal{V} = \int_0^1 \pi[h(x)]^2 dx \times 1\text{cm}^3$$
$$\mathcal{V} = \int_0^1 \pi[(x^2+2x)e^{-x}]^2 dx \times 1\text{cm}^3$$
$$\mathcal{V} = \int_0^1 \pi(x^4+4x^3+4x^2)e^{-2x} dx \times 1\text{cm}^3$$
$$\mathcal{V} = \pi(J_4+4J_3+4J_2) \times 1\text{cm}^3$$
$$\mathcal{V} = \pi\left(\frac{13e^2-79}{4e^2}\right) \times 1\text{cm}^3$$



Partie B (1,25 pt)

On considère la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln|x|$.

1. *Etudions les variations de* g.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}[1-x+x\ln|x|] = \lim_{X\to+\infty}[1+X-X\ln|X|]$$
$$= \lim_{X\to+\infty} X\left[\frac{1}{X}+1-\ln|X|\right] = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, avec $X = -x$

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{X\to0^+}[1+X-X\ln|X|] = 1$$

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = 1.$

g est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$

$g'(x) = -1 + ln(-x) + \frac{1}{x}\times x$

$\boldsymbol{g'(x) = ln(-x)}$

$\forall\, x<0\ ,\ g'(x) = 0\ ,\ ln(-x) = 0\ ,\ x = -1.$

x	$-\infty$		-1		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$, g est strictement croissante.

Sur l'intervalle $[-1\,;0[$, g est strictement décroissante. **0,5 pt**

2. *Montrons que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une unique solution* α *et que* $\alpha \in\ ]-4\,;-3[$.

- Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ g est continue et strictement croissante de plus, $0 \in g(]-\infty\,;\,-1[) =]-\infty\,;2[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$.
- Sur l'intervalle $]-1\,;0[$, $g(x) > 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-1\,;0[$.

En définitive, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $]-\infty\,;0[$

D'autre part $\begin{cases} g(-4) = 5 - 4ln4 \\ g(-3) = 4 - 3ln3\text{'} \end{cases}$

$g(-4) \times g(-3) < 0$ donc $\alpha \in\ ]-4\,;-3[$. **0,5 pt**

3. *Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.*
   Sur l'intervalle $]-\infty\,;\ \alpha]$, $g(x) \leq 0$.
   Sur l'intervalle , $[\alpha\,;0\,[$, $g(x) \geq 0$. **0,25 pt**

Partie C (4 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln|x|} & , si\ x < 0 \\ (x^2 + 2x + 1)\, e^{-x} & , si\ x \geq 0 \end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. *Déterminons le domaine de définition de f.*
   Posons $f_1(x) = f(x)$ si $x < 0$ et $f_2(x) = f(x)$ $si\ x \geq 0$
   si $x < 0$, $f(x)$ existe ssi $ln|x| \neq 0$, $|x| \neq 1$ $x \neq -1$ et $x \neq 1$
   d'où $D_{f_1} =]-\infty\,;0[\ \cap IR \setminus \{-1;1\} =]-\infty\,;\ -1[\,\cup\,]-1\,;0[$; $D_{f_1} =]-\infty\,;\ -1[\,\cup\,]-1\,;0[$
   si $x \geq 0$, $f(x)$ existe $D_{f_2} = IR \cap\ [0\,;\ +\infty[\ = [0\,;\ +\infty[$; $D_{f_2} = [0\,;\ +\infty[$.
   $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = IR \setminus \{-1\} =]-\infty\,;\ -1[\,\cup\,]-1\,;\ +\infty[$. **0,25 pt**
2. *Etudions la continuité et la dérivabilité de f en* 0.

➢ *Continuité en* 0

$f(0) = (0^2 + 2 \times 0 + 1)\, e^{-0} = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [(x^2 + 2x + 1)\, e^{-x}] = 1$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left[1 + \frac{x-1}{\ln|x|}\right] = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

On a : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0. **0,25 pt**

➢ *Dérivabilité en* 0.

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + \frac{x-1}{\ln|x|} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x\ln|x|} = -\infty$.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$, donc f n'est pas dérivable à gauche en 0.

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x^2 + 2x + 1)\, e^{-x} - 1}{x}$

  $\lim_{x \to 0^+} \left[xe^{-x} + 2e^{-x} + \frac{e^{-x} - 1}{x}\right]$

  $\lim_{x \to 0^+} \left[xe^{-x} + 2e^{-x} - \frac{e^{x} - 1}{x} \times \frac{1}{e^x}\right] = 2 - 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$, donc f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 1$.

Conclusion f n'est pas dérivable en 0. **0,5 pt**

3. *Etudions les variations de f(on pourra utiliser les résultats des parties* A *et* B).

❖ Sur $]-\infty\,;\ -1]\,\cup\,]-1\,;0[$ f est dérivable.

$$f(x) = 1 + \frac{x-1}{\ln|x|}$$

$$f'x) = \frac{ln|x| - \frac{1}{x}(x-1)}{(ln|x|)^2} = \frac{1 - x + xln|x|}{x(ln|x|)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(ln|x|)^2}$$

$f'(x)$ est du même signe que : $\frac{g(x)}{x}$.

x	$-\infty$		α		-1		0
$g(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	||
x		$-$		$-$	|	$-$	||
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	||

Sur $]-\infty; \alpha]$ f est strictement croissante

Sur $[\alpha\,; -1[\cup]-1\,; 0[$ f est strictement décroissante. **0,25 pt**

- Sur $[0\,; +\infty[$ f est dérivable.

  $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\, e^{-x}$

  $f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 1)\, e^{-x}$

  $f'(x) = (-x^2 + 1)e^{-x}$

  $\forall\, x \geq 0\,, f'(x) = 0\,, x = 1.$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	|	$+$	0	$-$	|

Sur $[0\,; 1]$ f est strictement croissante.

Sur $[1 : +\infty[$ f est strictement décroissante. **0,25 pt**

Dressons le tableau variations de f. **0,5 pt**

x	$-\infty$		α		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	$-\infty$ || 1	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$1+\alpha$	$\searrow$	||	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	

4. *Etudions les branches infinies de (C).*

✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[1 + \frac{x-1}{\ln|x|}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[1 + \frac{x}{ln|x|} - \frac{1}{ln|x|}\right]$

Posons $X = -x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[1 + \frac{x}{ln|x|} - \frac{1}{ln|x|}\right] + \lim\limits_{X \to +\infty} \left[1 - \frac{X}{lnX} - \frac{1}{lnX}\right] = -\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{ln|x|} - \frac{1}{xln|x|}\right] = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite $(x'x)$ en $-\infty$. **0,5 pt**

✓ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left[1 + \frac{x-1}{\ln|x|}\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

✓ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left[1 + \frac{x-1}{\ln|x|}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. **0,25 pt**

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C)

✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{e^{-x}} + \frac{2x}{e^{-x}} + \frac{1}{e^{-x}}\right] = 0$

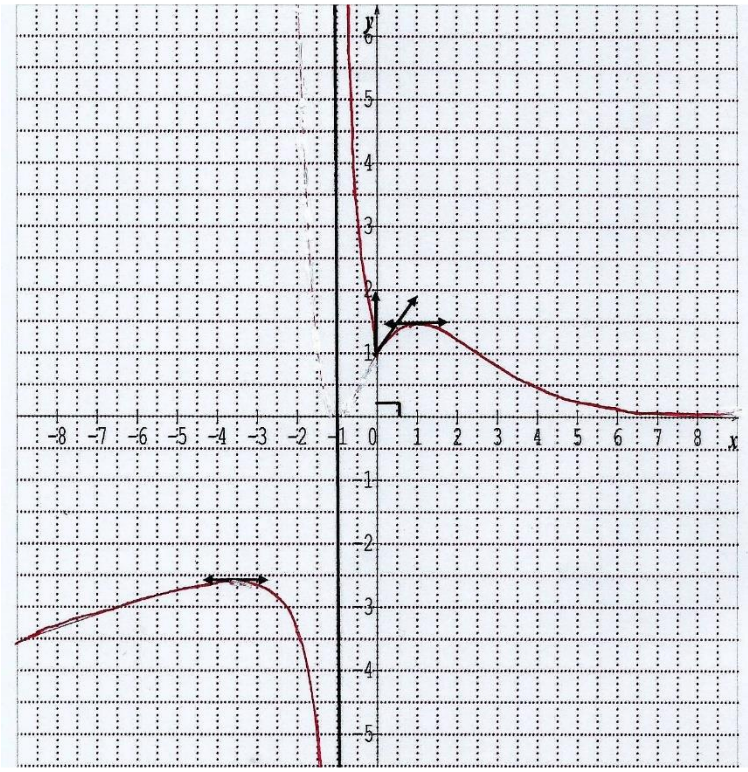
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à (C) en $+\infty$. **0,25 pt**

5. *Vérifions que* : $f(\alpha) = 1 + \alpha$.

On a : $f(\alpha) = 1 + \frac{\alpha - 1}{\ln|\alpha|}$. Or $g(\alpha) = 0$, $1 - \alpha + \alpha ln|\alpha| = 0$, $\alpha - 1 = \alpha ln|\alpha|$

Donc $f(\alpha) = 1 + \frac{\alpha \times ln|\alpha|}{\ln|\alpha|} = 1 + \alpha$; $f(\alpha) = 1 + \alpha$. **0,25 pt**

6. *Traçons la courbe* **0,75 pt**



Partie D **1,75pt**

Soit (U_n) la suite définie par :$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$

$$U_n = \frac{1}{n^3}\left[(1+n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2+n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \cdots \qquad + (n+n)^2 e^{-\frac{n}{n}}\right].$$

1. *Montrons que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$et k *un entier naturel tel que* : $0 \le k \le n-1$ *, on a* :

$$\frac{1}{n}\, f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \le \frac{1}{n}\, f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

$U_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$

On a : $0 \le k \le n-1$

$\frac{k}{n} \le t \le \frac{k+1}{n}$

$f\left(\frac{k}{n}\right) \le f(t) \le f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ **0,5 pt**

2. *Déduisons-en que* :

$U_n + \frac{e-4}{ne} \le \int_0^1 f(t)\,dt \le U_n$ et que : $I + \frac{e-1}{e} \le U_n \le I + \frac{e-1}{e} + \frac{4-e}{ne}$

On a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_0^1 f(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ **0,25 pt**

$\frac{1}{n} f(0) + U_n - \frac{1}{n} f(1) \le \int_0^1 f(t)dt \le U_n$

Or $(x) = (x+1)^2 e^{-x}$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$

Par conséquent

$U_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne} \le \int_0^1 f(t)\,dt \le U_n$.

- $U_n + \frac{e-4}{ne} \le \int_0^1 f(t)\,dt \le U_n$ **0,25 pt**

$I = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 (x^2+2x)e^{-x}dx$

$I = \int_0^1 (f(x) - e^{-x})dx = \int_0^1 f(x)dx + [e^{-x}]_0^1$

$I = \int_0^1 f(x)dx + e^{-1} - 1$

Par suite $\int_0^1 f(x)dx = I + 1 - e^{-1} = I + 1 - \frac{1}{e}$, $\int_0^1 f(x)dx = I + \frac{e-1}{e}$

- *Devient* $U_n + \frac{e-4}{ne} \le I + \frac{e-1}{e} \le U_n$

  Par conséquent $I + \frac{e-1}{e} \le U_n \le I + \frac{e-1}{e} + \frac{4-e}{ne}$ **0,25 pt**

3. *Montrons que* $(U_n), n \in IN^*$ *est convergente et donnons sa limite.*

$$\lim_{n \to +\infty} (I + \frac{e-1}{e}) = \lim_{n \to +\infty} (I + \frac{e-1}{e} + \frac{4-e}{ne}) = I + \frac{e-1}{e}$$

Par conséquent la suite (U_n) est convergente et sa limite est :

$$I + \frac{e-1}{e} = -\frac{9}{e} + 4 + \frac{e-1}{e} = \frac{-10 + e}{e} + 4 = 5 - \frac{10}{e}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 5 - \frac{10}{e}$$ **0,5 pt**