OFFICE DU BACCALAUREAT

E. mail : office@ucad.edu.sn

site web : officedu bac.sn

21T05AN 01A29
Durée: 04 heures
Série : T1 – Coef. 5
Série : T2 – Coef. 4
Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

CORRIGE

EXERCICE 1 (4 points)

Pour chacun des items ci-dessous, trois réponses a, b et c sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte. Pour répondre, écrire le numéro de l'item suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie. Une réponse exacte est notée 0,5 point, la justification 0,5 point et une réponse inexacte ou une absence de réponse est notée 0.

1. Les racines carrées de $-3-4i$ sont :
   J'encadre la bonne réponse

a) $-1-2i$ et $1+2i$ b) $-\sqrt{3}-2i$ et $\sqrt{3}+2i$ $\boxed{\textbf{c) } \boldsymbol{1-2i \quad \text{et} \quad -1+2i}\,.}$

2. Dans $\mathbb{C}$, l'équation $(2-i)z^2-4iz-2-i=0$ a pour ensemble de solutions :

a) $\left\{-\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i, 2i\right\}$ $\boxed{\textbf{b) } \left\{\boldsymbol{-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i, +i}\right\}}$ c) $\left\{-\frac{6}{5}+\frac{8}{2}i, -2i\right\}$

3. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx$ est égal à :

$\boxed{\textbf{a) } \frac{3}{2}}$ b) 3 c) 2

4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$. Dans un repère orthonormal, la courbe représentative de f a, au voisinage de -∞, une asymptote d'équation :

$\boxed{\boldsymbol{a)\ y = -x+1}}$ $b)\ y = x-1$ $c)\ y = -x$

EXERCICE 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, d'unité graphique 1 cm.

On considère les points $E(1\,;-2\,;0), F(-2\,;-3\,;5), G(2\,;1\,;1)$ et $H(1\,;1\,;3)$.

1. Démontrons que les points E, F, G et H sont coplanaires. On note (P) le plan passant par les points E, F, G et H. **(1pt)**

   $\overrightarrow{EF}$ (-3 ; -1 ; 5) $\overrightarrow{EG}$ (1 ; 3 ; 1) $\overrightarrow{EH}$ (0 ; 3 ; 3)

   $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG}$ (-16 ; 8 ; -8) n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{EH}$. Donc les points E, F, G et H sont coplanaires.

2. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; -1 ; 1) est un vecteur normal à (P). **(0,5 pt)**

   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$. Donc, le vecteur $\vec{n}$ (2 ; -1 ; 1) est un vecteur normal à (P).

3. Déterminons une équation cartésienne de (P). **(1 pt)**

$$(P) : 2x - y + z - 4 = 0$$

4. Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite (D) passant par $A(1\,;2\,;5)$ et perpendiculaire à (P). **(1 pt)**

   Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{n}$. Elle a donc pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ \quad 2 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ \quad 5 + t \end{cases}$$

5. Montrer que le point A n'appartient pas à (P). **(0,5pt)**

$$2 \times 1 - 2 + 5 - 4 \neq 0$$

   Donc le point A n'appartient pas à (P).

6. a. Calculons l'aire du triangle AFG. **(0,5 pt)**

   Aire $(AFG) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AG}\right\| \times 1\text{cm}^2$

   $\overrightarrow{AF}(-3, -5{,}0)$; $\overrightarrow{AG}(1, -1, -4)$;

   $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AG}(20, -12, 8)$. Donc **Aire** $(AFG = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AG}\right\| \times 1\text{cm}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{608} \times 1\text{cm}^2$

   b. Calculer le volume du tétraèdre $AEFG$. **(0,5 pt)**

   Volume $(AEFG) = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AG}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right| \times 1\text{cm}^3$

PROBLEME (11 points)

Soit f et g les fonctions définies sur ℝ par : $f\,(x) = e^{3x} - e^{x}$ et $g(x) = f(x) - 2x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1. Calculons la limite de f en $-\infty$ et interprétons le résultat. **(0,25ptx2)**

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. (D): $y = 0$ est asymptote.

2. Calculons la limite de f puis celle de $\frac{f\,(x)}{x}$ en +∞ et éduisons-en la nature de la branche infinie en +∞. **(0,5ptx2+0,25pt)**

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

   On a une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

3. Calculons $f'(x)$ pour tout réel x, f' étant la dérivée de f. **(0,5pt)**
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3e^{3x} - e^{x} = e^{x}(e^{2x} - 1)$
4. Etudions le signe de $3e^{2x} - 1$. **(0,5pt)**
   $3e^{2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln(3)$
5. Déterminons le sens de variation de f. **(0,5pt)**
   Sur $\left]-\infty\,; -\frac{1}{2}\ln(3)\right]$, f est strictement décroissante
   Sur $\left[-\frac{1}{2}\ln(3)\,;\ +\infty\right[$ f est strictement croissante
6. Dressons le tableau de variations de f. **(0,5pt)**

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	$+\infty$
$f(x)$	-		+
f	**0** $\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right)$	$\nearrow$ $+\infty$

7. Soit (T) la droite d'équation $y = 2x$.
   a. Montrons que la droite (T) est tangente à (C_f) au point d'abscisse 0. **(0,5pt)**
   $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$. Donc, la droite (T) est tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
   b. Montrons que, pour tout nombre réel x, $g'(x) = (e^{x} - 1)(3e^{2x} + 3e^{x} + 2)$. **(1pt)**
   Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 3e^{3x} - e^{x} - 2 = (e^{x} - 1)(3e^{2x} + 3e^{x} + 2)$.
   c. Etudions les variations de g puis dresser son tableau de variation. **(1pt+0,5pt)**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{x} - 1$	-		+
$3e^{2x} + 3e^{x} + 2$	+		+
$g'(x)$	-		+
g	$+\infty$ $\searrow$	$g(0)$: 0	$\nearrow$ $+\infty$

8. Déduisons-en le signe de $g(x)$ et précisons la position de (C_f) par rapport à (T).
   (0,5pt+0,5pt)

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$. La courbe (C_f) est au dessus de (T).

9. Soit h la restriction de f à l'intervalle]0 ;+∞[.

   a. Montrons que h définit une bijection de]0 ;+∞[sur un intervalle J à préciser. **(0,25ptx2)**

   h est continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de]0 ;+∞[vers $J =]0\,;+\infty[$

   b. Déterminons le sens de variations de h^{-1} bijection réciproque de h. **(0,5pt)**

   h^{-1} a le même sens de variation que h, c'est-à-dire strictement croissante de $=]0\,;+\infty[$ vers $=]0\,;+\infty[$.

10. Tracer (C_f) et $(C_{h^{-1}})$, $C_{h^{-1}}$ étant la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

(1,5+0,75pt)