REPUBLIQUE DU SENEGAL

****

Un Peuple - Un But - Une Foi

****

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION

Cours de Mathématiques

****

Classe : Terminale S2

Présenté par :

Babacar DJITTE

Année Universitaire 2014-2015

11 mai 2017

Table des matières

Introduction

Ce cours s'adresse aux élèves de la classe de Terminale S2 des lycées sénégalais....

Méckhé le 29/12/2015 vers 22h48

Première partie

ANALYSE

CHAPITRE 1

Fonction numérique d'une variable réelle

Inspection Académique de Saint-Louis **Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé **Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté

Série n^{o}1 : Fonctions Numériques

☞**Exercice 1**
Déterminer si elles existent les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{1-\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+3}}{x-2}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x+\sqrt{2x^2-5x+1})$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{3+2\sin x}$;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

☞**Exercice 2**
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-|x|+1}$. On note $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
3. Déterminer la fonction dérivée de f.
4. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
5. Construire $(\mathcal{C}f)$ (unité 4 cm).
6. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [2; +\infty[$.
a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) On appelle g^{-1} sa bijection réciproque. Dire si g^{-1} est dérivable en 2 ; le cas échéant, calculer $(g^{-1})'(2)$.
c) Pour tout $x \in J$, expliciter $g^{-1}(x)$.
d) Construire $(\mathcal{C}g^{-1})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

☞**Exercice 3**
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$. On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
1. Déterminer Df puis justifier le choix de l'intervalle $[0;\pi]$ comme l'intervalle d'étude.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0;\pi]$ et

$$\forall x \in [0;\pi],\ f'(x) = 4\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\cos x + 1).$$

3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.
4. Construire $(\mathcal{C}f)$ sur $[-2\pi; 2\pi]$ (On précisera les tangentes horizontales)

☞**Exercice 4**
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3-3x+6}{(x-1)^2}.$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
1. Déterminer le domaine de définition Df de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de Df. En déduire l'équation de l'asymptote verticale.
3. a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x \in Df,\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.
b) En déduire que $(\mathcal{C}f)$ admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ et en $+\infty$ dont on déterminera son équation.
c) Etudier les positions relatives de de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à (D).
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}.$$

5. Etudier les variations de f puis dresser

son tableau de variation.
6. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que :
$-3<\alpha<-2$.
b) En déduire le signe de f
7. Tracer $(\mathcal{C}f)$ (on précisera les points d'intersection de $(\mathcal{C}f)$ avec les axes du repère).

☞**Problème 1**

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-1} & si \quad x<0\\ x+\sqrt{x^2+x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis étudier la continuité et la dérivabilté de f en 0. Interpréter les résultats.
2) Déterminer les limites aux bornes de Df.
3) Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}f$.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer $\mathcal{C}f$.
6) Soit h la restriction de f à $[0;+\infty[$ et $\mathcal{C}h^{-1}$ sa courbe représentative.
a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera son ensemble
de définition et son sens de variation
b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} puis calculer $(h^{-1})'(2)$.
c) Tracer $\mathcal{C}h^{-1}$. Expliciter $h^{-1}(x)$.

☞**Problème 2**

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-3x^2-1$.
1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1<\alpha<2$.
Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3. Donner le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases}f(x)=x\sqrt{-x}+1 & si \quad x\leq 0\\ f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3} & si \quad x>0\end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
1. Déterminer le domaine de définition Df de f puis calculer les limites de f aux bornes de Df.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Etudier les branches infinies.
4. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis montrer que $\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.
5. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
6. Construire $(\mathcal{C}f)$.

Partie C : Soit h la restriction de h à l'intervalle $I=]-\infty;0]$.
1. Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
2. h^{-1} la réciproque de h est-elle dérivable sur J ?.
3. Calculer $h(0)$ puis étudier la dérivabilté de h^{-1} en 1. Calculer $(h^{-1})'(1)$.
4. Construire $(\mathcal{C}h^{-1})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

☞**Problème 3**

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x-1} & si \quad x<0\\ f(x)=x+\sqrt{|x^2-x|} & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. a) Déterminer le domaine de définition Df de f puis calculer les limites de f aux bornes de Df.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1. Interpréter les résultats.
2. Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.
3. Résoudre dans $]0;1[$, l'inéquation $2\sqrt{x-x^2}+1-2x\leq 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;1[$ puis étudier son signe sur les autres intervalles.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. a) Montrer que $(\mathcal{C}f)$ admet une asymptote oblique (Δ_1) en $+\infty$.
b) Etudier la positon relative de $(\mathcal{C}f)$

par rapport à (Δ_1) sur $]1;+\infty[$.

6. a) Montrer que $(\mathcal{C}f)$ admet une asymptote oblique (Δ_2) en $-\infty$.

b) Etudier la positon relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à (Δ_2) sur $]-\infty;0[$.

7. Construire $(\mathcal{C}f)$.

8. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=]1;+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) g^{-1} la bijection réciproque de g est-elle dérivable sur J ? Calculer $(g^{-1})'(2)$.

c) Expliciter $(g^{-1})(x)$ pour $x \in J$.

d) Construire $(\mathcal{C}g^{-1})$ la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☞**Problème 4**

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x}\right|} & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x^3 - x^2}{x^2+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire g sans barres de valeur absolue.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 et en -1.
3. Etudier les branches infinies et la position de la courbe par rapport aux éventuelles asymptotes.
4. Calculer $g'(x)$ sur les intervalles où g est dérivable.
5. Soit $\phi(x) = x^3 + 3x - 2$.

a) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

b) En déduire le signe de ϕ sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que $g'(x) = \dfrac{x\phi(x)}{(x^2+1)^2}$ sur $[0;+\infty[$ puis établir le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
7. Tracer les droites remarquables puis tracer $\mathcal{C}g$ la courbe de g.

« L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit»

Aristote

1.5 Primitive

CHAPITRE 2 Primitives

2.1 Généralités

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

☞ **Exemple 2.1.1**

Fonction f $\longrightarrow$ Primitive F
$f(x) = 2x \longrightarrow F(x) = x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \sin x \longrightarrow F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \sin x$

Thèoréme 2.1.1 *Toute fonction continue sur intervalle I admet des primitives sur I.*

2.1.2 Ensemble des primitives

Thèoréme 2.1.2 *Soit f fonction continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I. Alors toute primitive G de f sur I, est de la forme $G(x) = F(x) + c$, c : constante réelle*

Preuve 2.1.1
F est une primitive de f sur I donc $F'(x) = f(x)$ (1).
Soit G une primitive de f sur I donc $G'(x) = f(x)$ (2)
$(1) = (2) \Rightarrow G'(x) - F'(x) = 0 \Rightarrow (G-F)'(x) = 0 \Rightarrow (G-F)(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$

☞ **Exemple 2.1.2** *Soit $f(x) = \cos x$. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 2.1.1 *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

2.1.3 Primitive prenant une valeur y_0 en un point x_0 donné $(F(x_0) = y_0)$

Thèoréme 2.1.3 *Soit f fonction continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 c-a-d $F(x_0) = y_0$.*

☞ **Exemple 2.1.3** *Soit $f(x) = \cos x$.*
Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $(\mathcal{C}F)$ passe par le point $A(0; \sqrt{3})$

2.2 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	*Primitive*	*Intervalle*
$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a \quad (constante)$	$F(x) = ax + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = 2x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + c$	$]-\infty; 0[ou]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}(n \in \mathbb{N} - \{1\})$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[ou]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$[0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}[\pi]; \dfrac{\pi}{2}[\pi]\right[$

☞ **Exemple 2.2.1**
Fonction $f \longrightarrow$ Primitive F

$$f(x) = 2 \longrightarrow F(x) = 2x + c$$
$$f(x) = x \longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$
$$f(x) = x^5 \longrightarrow F(x) = \frac{1}{6}x^6 + c$$
$$f(x) = \frac{1}{x^4} \longrightarrow F(x) = -\frac{1}{3x^2} + c$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \longrightarrow F(x) = -\frac{1}{x} + c$$

2.3 Opérations sur les primitives

Soient U et V deux fonctions dérivables de fonctions dérivées respectives U' et V'.

Fonction	*Primitive*
$kU', k \in \mathbb{R}$	kU
$U' + V'$	$U + V$
$U'U$	$\frac{1}{2}U^2$
$U'U^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}U^{n+1}$
$\frac{U'}{U^n}, n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)U^{n-1}}$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$
$U'V + V'U$	UV
$\frac{U'V - V'U}{V^2}$	$\frac{U}{V}$
$U' \cos U$	$\sin U$
$U' \sin U$	$-\cos U$
$\frac{U'}{\cos^2 U} = U'(1 + \tan^2 U)$	$\tan U$

☞ **Exemple 2.3.1** *Déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + 1$; *b.* $f(x) = 7x^4$; *c.* $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)$;

d. $f(x) = (6x-9)(x^2-3x+6)^5$; *e.* $f(x) = (-x+4)\left(-\frac{1}{2}x^2+4x-7\right)^4$;

f. $f(x) = \sin x + x\cos x$; *g.* $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-7}}$; *h.* $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{2x^2-x+1}}$;

i. $f(x) = \frac{2}{(2x-3)^2}$; *j.* $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$; *k.* $f(x) = 3\cos(3x-4)$;

l. $f(x) = \sin(2x-7)$; *m.* $f(x) = 2(1+\tan^2(2x+1))$

Cas particuliers :

$$\text{Fonction } f \longrightarrow \text{Primitive } F$$

$$f(x) = \cos(ax+b) \longrightarrow F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

$$f(x) = \sin(ax+b) \longrightarrow F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \longrightarrow F(x) = \frac{1}{a}\tan(ax+b)$$

☞ **Exemple 2.3.2** *Déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a. $f(x) = \cos(3x)$; *b.* $f(x) = \cos(4x-3)$; *c.* $f(x) = \sin(2x+7)$;

d. $f(x) = \frac{1}{\cos^2(5x+6)}$

☞Exercice d'application 2.3.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$.

1. Montrer que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la forme $F(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ où a et b sont des réels à déterminer.
2. En déduire la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

☞Exercice d'application 2.3.2

1. Soit f et w deux fonctions définies sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \text{ et } w(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$$

a. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.
b. En déduire sur I une primitive de la fonction w.

2. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x^3-x^2-8x+8}{(x-2)^2}$

a. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\},\ g(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

b. En déduire les primitives de g sur $]2, +\infty[$.

Rappel : $\boxed{\dfrac{A}{B} = R + \dfrac{Q}{B}}$

CHAPITRE 3

Fonction Logarithme Népérien

3.1 Généralités

Définition 3.1.1
La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc elle y admet des primitives.
On appelle fonction logarithme népérien, notée $\ln$, la primitive de f qui s'annule en 1.

$$\begin{aligned} \ln :]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln x \end{aligned}$$

Conséquence 3.1.1

- $\ln$ *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$.
- $\forall x \in]0;+\infty[\ (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
- $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$.
- $\ln 1 = 0$

NB :
- $\ln U(x)$ existe *ssi* $U(x) > 0$
- $\ln |U(x)|$ existe *ssi* $U(x) \neq 0$.
- $\ln[U(x)]^2$ existe *ssi* $U(x) \neq 0$.
- $\ln$ d'un nombre négatif n'existe pas mais $\ln$ d'un nombre peut être négatif.

☞ **Exemple 3.1.1** *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*
a) $f(x) = \ln(2x+3)$; *b)* $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; *c)* $f(x) = \ln|2x+3|$; *d)* $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$;
e) $f(x) = \ln(-x+1)^2$; *f)* $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; *g)* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} + \dfrac{2x}{\ln(x+2)}$

Propriété 3.1.1 *Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On a :*
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

- $\ln(a^n) = n\ln a,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln x = k \Leftrightarrow x = e^k,\ k \in \mathbb{R}$

Preuve 3.1.1

• *$\forall a > 0$, la fonction $f : x \longmapsto \ln(ax)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :*

$f'(x) = (\ln ax)' = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x} \Longrightarrow f$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Or $\ln$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$, alors on a : $f(x) = \ln x + c \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln x + c$.

Si $x = 1$, on a : $\ln a = \ln 1 + c \Longrightarrow c = \ln a$. D'où $\ln ax = \ln x + \ln a$.

En posant $x = b$ on obtient $\boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$.

• $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln a + \ln\frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln\frac{1}{a} = -\ln a}$.

• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b \Leftrightarrow \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$.

• $\ln a = \ln(\sqrt{a})^2 = 2\ln\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}$

☞ **Exemple 3.1.2** *Simplifier les expressions suivantes :*

$A = \ln 8 - 2\ln 16 + 4\ln\sqrt{2}$ *(Rep. $A = -3\ln 2$)*

$B = \frac{1}{27} + \ln 81 - \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ *(Rep. $B = -3\ln 3$)*

$C = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 12 - 3\ln 9$

☞**Exercice d'application 3.1.1**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(3x+4) = 0$ *Rep.* $D_v = \left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ *et* $S = \{-1\}$

b) $3\ln x + 2 = 0$ *Rep.* $D_v =]0;+\infty[$ *et* $S = \left\{e^{-2/3}\right\}$

c) $\ln(2x+7) = \ln(5x+4)$ *Rep.* $D_v = \left]-\frac{4}{5};+\infty\right[$ *et* $S = \{1\}$

d) $\ln(x+1) + \ln(3x-4) = \ln(2x+2)$ *Rep.* $D_v = \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ *et* $S = \{2\}$.

e) $\ln^2 x - \ln x - 6 = 0$ *Re.* $D_v =]0;+\infty[$ *et* $S = \{e^{-2}; e^3\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(2x+1) \geq 0$ *Rep.* $D_v = \left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ *et* $S = \{-1\}$

b) $\ln(2x+1) \leq \ln(x+3)$ *Rep.* $D_v = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ *et* $S = \left]-\frac{1}{2};2\right[$

c) $\ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln(3x+2)$ *Rep.* $D_v = \left]-\frac{2}{3};2\right[$ *et* $S = \left]-\frac{2}{3};1\right[$

☞**Exercice d'application 3.1.2**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln(xy) = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 7 \\ \ln x + 2\ln y = 4 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} \ln(x+y) = \ln 5 \\ \ln(xy) = \ln 6 \end{cases}$

Remarque 3.1.1 *: Inéquation du type $P(\ln x) \leq 0$ (≥ 0, < 0, > 0) avec P un polynôme*

Principe *: Pour résoudre l'inéquation $P(\ln x) \leq 0$, on résout l'inéquation $P(x) \leq 0$, puis on remplace dans l'ensemble des solutions :*

- *$-\infty$ par 0*
- *les nombres réels a par e^a*
- *$+\infty$ par $+\infty$*

☞ **Exemple 3.1.3** *On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$.*

1. Vérifier que 1 est une racine de $P(x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$ et $P(x) \geq 0$.

3. En déduire les solutions de :

a) $\ln^3 x - 8\ln^2 x + 19\ln x - 12 = 0$;

b) $\ln^3 x - 8\ln^2 x + 19\ln x - 12 \geq 0$

☞**Exercice d'application 3.1.3** *Résoudre dans $\mathbb{R}$:*

a) $\ln^2 x - 7\ln x + 12 = 0$

b) $\ln^2 x - 7\ln x + 12 > 0$

c) $\ln^3 x - 2\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0$

d) $\ln^3 x - 2\ln^2 x - 5\ln x + 6 < 0$.

Résolution

a) $\ln^2 x - 7\ln x + 12 = 0$

♣ *Changement d'inconnue : Posons $X = \ln x$. On a alors :*

$X - 7X + 12 = 0$ *donc* $X_1 = 3$ *et* $X_2 = 4$.

♣ *Retour au Changement d'inconnue : .*

$X = \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$

$X = \ln x = 4 \Rightarrow x = e^4$. *Alors* $\boxed{S = \{e^3; e^4\}}$

b) $\ln^2 x - 7\ln x + 12 > 0$

♣ *Changement d'inconnue : Posons $X = \ln x$. On a alors :*

$X - 7X + 12 = 0$ *donc* $X_1 = 3$ *et* $X_2 = 4$.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$X^2 - 7X + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

♣ *Retour au Changement d'inconnue :.*

x	0		e^3		e^4		$+\infty$
$\ln^2 x - 7\ln x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors $\boxed{S =]-\infty; e^3[\cup]e^4; +\infty[}$

3.2 Etude de la fonction ln

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$

3.2.1 Domaine de définition

$f(x)$ existe *ssi* $x > 0$. Alors $\boxed{Df =]0; +\infty[}$

3.2.2 Limites aux bornes

Propriété 3.2.1

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ *(On étudie* $g(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$ *sur* $[1; +\infty[$*)*

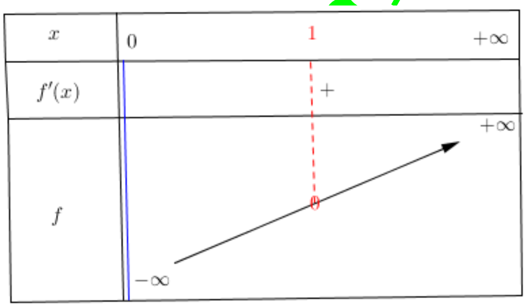
3.2.3 Branches infinies

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymtote verticale.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc l'axe (Ox) est une Branche parabolique

3.2.4 Dérivée et sens de variation

- ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $\forall x \in]0; +\infty[$ $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
- Alors ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3.2.5 Tableau de variations



3.2.6 Signe de ln x

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$

- $\forall x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$.
- $\forall x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$.
- $\ln 1 = 0$

Remarque 3.2.1 ln *est continue et strictement croissante sur* $]0; +\infty[$ *alors* ln *réalise une bijection de* $]0; +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Or* $1 \in \mathbb{R}$ *d'où il existe un unique réel* $e \in]0; +\infty[$ *tel que* $\ln e = 1$. $\boxed{e \simeq 2,718}$.

$\ln e = 1$; $\ln e^2 = 2$; $\ln e^{-3} = 3$; $\ln e^5 = 5$. *Donc* $\forall \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln e^k = k}$

3.2.7 Equation de la tangente à $\mathcal{C}f$ en 1

$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(1) = 1$ et $f(1) = \ln 1 = 0$

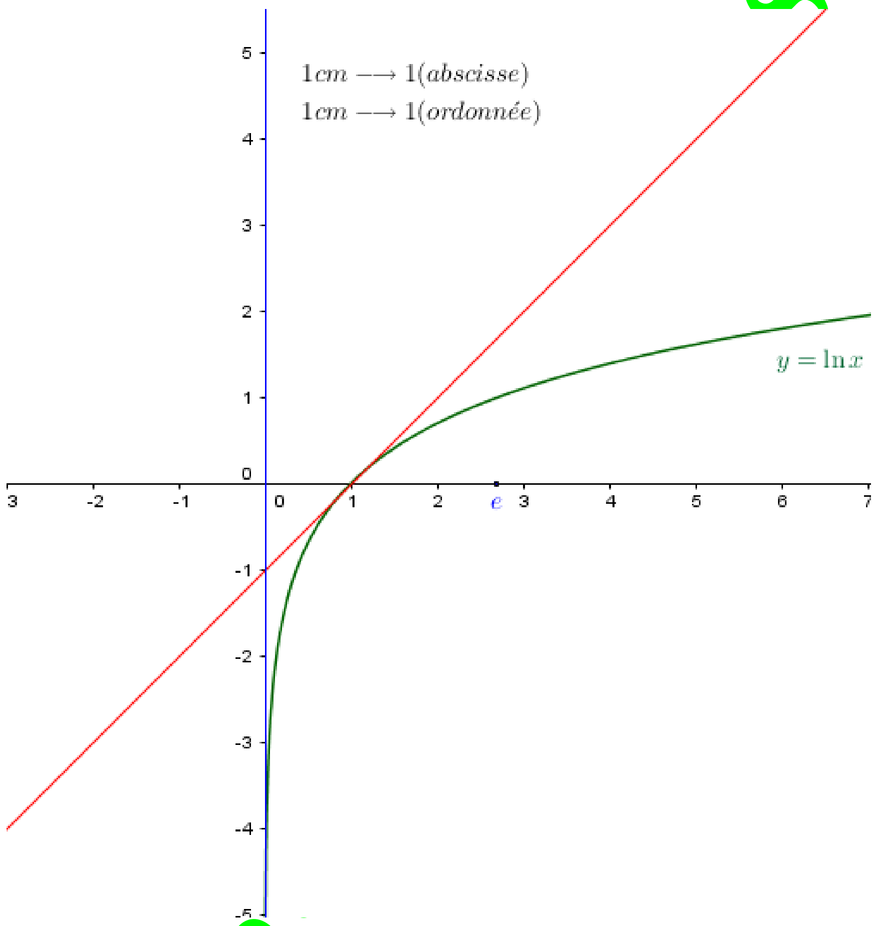
D'où $\boxed{(T) : y = x - 1}$

x	0	1
y	-1	0

3.2.8 Tableau des valeurs

x	0,5	1	e	4
$\ln x$	-0,69	0	1	1,38

3.2.9 Courbe représentative de la fonction ln



3.2.10 Autre limites usuelles

Propriété 3.2.2

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$; • $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; • $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$; • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

☞ **Exemple 3.2.1** *Calculer les limites suivantes :*

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\ln x)$; *b.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; *c.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; *d.* $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)$;
e. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; *f.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}$; *g.* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

3.3 Fonctions Composées avec ln : $f(x) = ln(U(x))$

3.3.1 Domaine de définition

$f(x)$ existe ssi $U(x) > 0$

3.3.2 Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to a} lnU(x) =?$

$$\begin{cases} Si \quad \lim\limits_{x\to a} U(x) = l \\ \quad et \\ \lim\limits_{x\to l}\ln x = l' \end{cases} \qquad \text{alors } \lim\limits_{x\to a} lnU(x) = l'$$

☞ **Exemple 3.3.1** *Calculer les limites suivantes :*
a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{x^2+3x+1}\right)$; *b.* $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; *c.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x+3)$; *d.* $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

3.3.3 Dérivée

Thèoréme 3.3.1 *Si U est une fonction dérivable et strictement positive sur I alors $\ln U$ est dérivable sur I et on a :*
$$\boxed{(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}} \Leftrightarrow \forall x \in I, (\ln U(x))' = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$$

NB :
- $(\ln|U|' = \dfrac{U'}{U})$; • $\left(\ln\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V-V'U}{UV}$; • $\left(\ln\left|\dfrac{U}{V}\right|\right)' = \dfrac{U'V-V'U}{UV}$;

☞ **Exemple 3.3.2** *Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :*
a. $f(x) = \ln(3x+7)$; *b.* $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; *c.* $f(x) = \ln\left|x^2+2x+3\right|$;
d. $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{2x+3}\right|$

Remarque 3.3.1 *Une primitive de* $\dfrac{U'}{U}$ *est* $\ln|U|$

☞ **Exemple 3.3.3** *Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :*
a. $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}$; *b.* $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Indication *: Pour b. on détermine les réels a et b tels que* $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$

========================

☞**Problème 1**

Partie A : Soit g la fonction définie par $g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$
1. Etudier les variations de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2\ln(x+1)}{x+1}$
1. Déterminer Df puis calculer les limites aux bornes de Df.
2. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$. Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à l'asymptote oblique.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x+1)^2}$.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}f)$ au point d'abscisse 0.
5. Montrer qu'il existe un unique point A de $(\mathcal{C}f)$ où la courbe admet une tangente parallèle à l'asymptote oblique.Déterminer alors les cordonnées du point A.
6. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
7. Construire $(\mathcal{C}f)$.

Partie C :
1. Montrer que f réalise une bijection de $I =]-1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
2. Soit f^{-1} sa bijection réciproque.
   a) Calculer $f(0)$.f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Si oui, calculer $(f^{-1})'(0)$.
   b) Construire $(\mathcal{C}f^{-1})$, la courbe de f^{-1} dans le même repère.

========================

☞**Problème 2**

Partie A : Soit g la fonction définie définie par $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.
1. Déterminer Dg, le domaine de définition de g puis calculer les limites aux bornes de Dg.
2. Calculer $g'(x)$, étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de g.
3. Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne $\alpha \in]-0,72;-0,71[$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$. On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer le domaine de définition Df de f puis calculer les limites aux bornes de Df.
2. Calculer $f'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$
4. Dresser le tableau de variations de f. 5. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

Partie C : Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.
1. Déterminer les fonctions u et v telles que $h(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$. En déduire une primitive de h.
2. Aprés avoir vérifier que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)}$.
3. Déduire des questions précédentes une primitive de f sur $]0;+\infty[$

=========================

☞**Problème 3**

Partie A : Soit g la fonction définie par $g(x) = x + 1 - (2x + 1)\ln x$
1. Déterminer f' et f'' les dérivées premières et secondes de f. 2. Déterminer le sens de variations de f'. En déduire le signe de f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près
5. En déduire le signe de $f(x)$.

Partie B : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + x}$
1. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$.
2. Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(2\alpha - 1)}$.
3. Dresser le tableau de variations de g.
4. Ecrire une équation de (Δ) tangente à $(\mathcal{C}g)$ au point $A(0; 1)$.
5. Construire $(\mathcal{C}g)$ et (Δ) sur le même graphe.

3.4 Fonction logarithme de base a

Définition 3.4.1 *Soit $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$. On appelle fonction logarithme de base a, la fonction notée $\log_a$ et définie par* $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Conséquence 3.4.1

- $\log_a(a) = 1$
- *Si* $x > 0$, $y > 0$ *alors* $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(1) = 0$

Dérivée

$\log_a$ *est dérivable sur* $]0; +\infty[$ *et on a :* $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$.

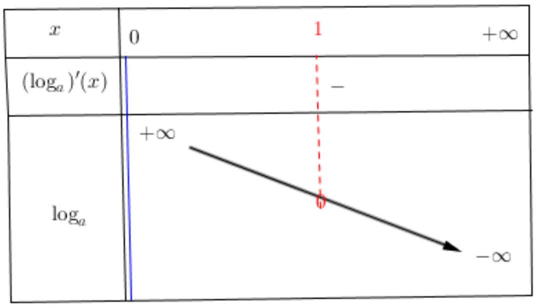
- *Si* $a \in]0; 1[$.

  ♣ $\ln a < 0 \Rightarrow (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \ln a} < 0$ *alors* $\log_a$ *est strictement décroissante sur* $]0; +\infty[$.

  ♣ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln a} = +\infty$

  ♣ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln a} = -\infty$

  ♣ *Tableau de variations*



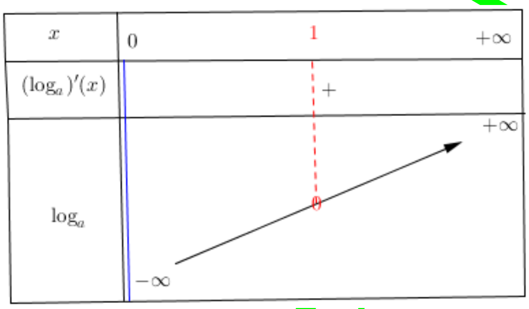
- *Si* $a > 1$.

  ♣ $\ln a > 0 \Rightarrow (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \ln a} > 0$ *alors* $\log_a$ *est strictement croissante sur* $]0; +\infty[$.

  ♣ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln a} = -\infty$

  ♣ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln a} = +\infty$

  ♣ Tableau de variations



Cas particuliers :

- Logarithme de base 10 ou logarithme décimal : $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$
- Logarithme de base e ou logarithme népérien : $\log_e(x) = \dfrac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

Inspection Académique de Saint-Louis	**Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé	**Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté	

Série n^{o}3 : Fonction Logarithme Népérien

☞Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2\ln(3x-5)$; b) $f(x) = \ln|4x^2+5x-9|$

c) $f(x) = \ln(1-x) + \ln(-4x-9)$;

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$; e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{11x-9}{2x+3}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$; g) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

h) $f(x) = \ln(2x+3)^2$; i) $f(x) = \ln\left|\dfrac{2x-4}{x+3}\right|$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x - x}$

☞Exercice 2

1. On considère $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$.
   a) Calculer $P(2)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   - $3\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 10 = 0$
   - $3\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 10 \geq 0$.

☞Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   a) $\ln(x+1) + \ln(2x+1) = 0$
   b) $2\ln(x+1) - \ln(x+3) = 0$
   c) $(\ln x)^2 - 3\ln x + 4 \leq 0$
   d) $(\ln x)^2 - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2 = 0$.
   e) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) < 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :
   a) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$
3. Trouver le plus petit entier n tel que
   $1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \geq 0,99$.

☞Exercice 4

1. Etudier la limite en 0^+ et en $+\infty$ de f dans chaque cas :
   a) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; b) $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$;
   c) $f(x) = x\ln x^2$; d) $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$
   .
2. Calculer la limite de f en $+\infty$:
   a) $f(x) = \ln x - x$; b) $f(x) = \ln(x-1) - \ln x$; c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$; $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$.
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$.
   a) Déterminer Df.
   b) Calculer les limites aux bornes de Df.

☞Exercice 5

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$:
   a) $f(x) = x^2\ln(x-1)$; b) $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$
   c) $f(x) = \sqrt{1-\ln x}$; d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
   e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$
   g) $f(x) = \ln(x^2+x+1)$; h) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$;
   i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.
2. Etudier les variations des fonctions f, g, h et k définies ar
   $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2\ln x}$;
   $h(x) = \dfrac{\ln x + 2}{\ln x - 1}$; $k(x) = \dfrac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

☞Exercice 6

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x - x \quad si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer Df puis calculer les limites aux bornes de Df.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+. Interpréter les résultats.
3. Etudier les variations de f.
4. Construire la courbe de f.

☞**Exercice 7**

1. On donne $g(x) = -8\ln x + x^2 + 4$.
   a) Calculer $g'(x)$ puis étudier les variations de g.
   b) Déterminer le signe de $g(x)$.
2. On considère $f(x) = \left(\dfrac{x^2+4}{x^2}\right)\ln x$
   a) Déterminer Df puis calculer les limites aux bornes de Df.
   b) Calculer $f'(x)$ puis montrer que
   $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$
   b) Dresser le tableau de variations de f.

☞**Exercice 8**

Soit $g(x) = 2x - 2 - x\ln x$.

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $]0;+\infty[$ et que $0 < \alpha < e$ et $4,5 < \beta < 5$. préciser la valeur exacte de α.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

☞**Problème 1**

Partie A : Soit h la fonction définie par
$h(x) = x^2 + 2x + \ln|x+1|$.

1. Etudier les variations de h.
2. Calculer $h(0)$ et $h(-2)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{\ln|x+1|}{x+1} - x$.

1. Déterminer Df puis calculer les limites aux bornes de Df.
2. Montrer que $\forall x \in Df,\ f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}f)$.
   b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à (D).
5. Montrer que le point $I(-1;1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}f)$.
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$.
7. Montrer que :
   $\forall x \in]-1;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} - x.$
   En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$.

☞**Problème 2**

Partie A : Soit g la fonction définie par
$g(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(x+1)$.

1. Déterminer le domaine de définition Dg de g puis étudier les limites aux bornes de Df.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$ et que $3,6 < \alpha < 4$.
5. Déterminer le signe de g.

Partie B : Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \quad si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(unité 2 cm)

1. Déterminer le domaine de définition Df de f.
2. Calculer les limites aux bornes de Df.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
5. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.
6. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
7. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
8. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [\alpha;+\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I

vers un intervalle J à préciser.
2. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. Calculer $h(4)$ puis $(h^{-1})'(\ln(\sqrt{5}))$.
4. Construire $(\mathcal{C}h^{-1})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☞**Problème 3**

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1+x^2-2x^2\ln x$.
1. Dresser le tableau de variations de u.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution λ telle que $1,89 < \lambda < 1,90$.
2. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.
et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).
1. Calculer les limites aux bornes de Df.
2. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
3. Calculer $f'(x)$ puis montrer que

$$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que $f(\lambda) = \dfrac{1}{2\lambda^2}$.
6. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [2;+\infty[$
1. Montrer que h réalise une bijection de I vers J à préciser.
2. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. Calculer $h(3)$ et $(h^{-1})'\left(\dfrac{\ln 3}{10}\right)$.
4. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(\mathcal{C}h^{-1})$ la courbe de h^{-1}.

☞**Problème 4**

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$f(x) = 1 + \ln(x+1)$ et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
3. Etudier les variations de f.
4. Montrer que dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution β et que $1 < \beta < 3$. (On pourra étudier $g(x) = f(x) - x$)
5. Montrer que sur $[1;+\infty[$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
6. En appliquant les Inégalités des Accroissements finis, montrer que $|f(x)-\beta| \leq \dfrac{1}{2}|x-\beta|$.
7. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et
$u_n \geq 1$, $\forall n \geq 0$.
b) En déduire que :
$|u_{n+1} - \beta| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \beta|, \forall n \geq 0$.
c) Montrer alors que :
$|u_n - \beta| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \beta|, \forall n \geq 0$.
d) Déterminer le plus petit entier p, si possible, tel que $|u_p - \beta| \leq 10^{-1}$.
(On remarquera que $|u_0 - \beta| \leq 2$).

☞**Problème 5**

Partie A : Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.
1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $]0;+\infty[$ puis vérifier que $1,3 < \beta < 1,35$.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1-\ln x}{x}$. On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer le domaine de définition Df de f puis calculer les limites aux bornes de Df.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
4. Préciser la position relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
5. Montrer que $f(\beta) = \dfrac{2\beta^2-1}{\beta}$.
6. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de

variation de f.
7. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).
Partie C : Soit h la fonction définie sur $I = [1,3;1,35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.
1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$.
2. Montrer que h est décroissante sur I et que pour tout x de I, $h(x) \in I$.
4. Montrer que $\forall x \in I$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{3}$.
Partie D : On considère la suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1,3 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$
1. Montrer que pour tout n, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{3}|u_n - \beta|$.
2. En déduire que $|u_n - \beta| \leq \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
3. En déduire la limite de (U_n).
4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|u_p - \beta| \leq 10^{-6}$. Que représente β pour u_p ?

« L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit»

Aristote

CHAPITRE 4 Fonction exponentielle

4.1 Généralités

Définition 4.1.1
La fonction $\ln$ *est continue et strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *alors elle réalise une bijection de* $]0;+\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$.
On appelle fonction exponentielle notée ***exp*** *la bijection réciproque de la fonction* $\ln$.
Ainsi on a exp :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow &]0;+\infty[\\ x & \mapsto & exp(x) = e^x \end{array}$$

Conséquence 4.1.1
• *La fonction exp est définie sur* $\mathbb{R}$.
• $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall y \in]0;+\infty[$, *on a* $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\ln e^x = x$
• $\forall x \in]0;+\infty[$, *on a :* $e^{\ln x} = x$.
• *La fonction exp est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
  * $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$.
  * $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$.
  * $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$.
  * $e^0 = 1$.

• *Les courbes des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation* $y = x$*).*

Propriété 4.1.1 *Pour tous réels a et b on a :*
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
- $(e^a)^n = e^{na}$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\left(e^{\frac{a}{n}}\right) = (e^a)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

☞**Exercice d'application 4.1.1**
1. Simplifier $A(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*
  a. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

b. $e^{3x} - 4e^{2x} + 3e^{x} < 0$
c. $4e^{2x} + 11e^{x} - 3 = 0.$
d. $e^{x} + 5 - 6e^{-x} = 0.$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ *les systèmes suivants :*

a. $\begin{cases} 3e^{x} + 2e^{y} = 13 \\ -e^{x} + 5e^{y} = 7 \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} e^{x+y} = 4 \\ e^{x} + e^{y} = 3 \end{cases}$ *c.* $\begin{cases} e^{x+y} = e^{7} \\ xy = 12 \end{cases}$

4.2 Etude de la fonction *exp*

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x$

4.2.1 Domaine de définition

La fonction *exp* est définie sur $\mathbb{R}$. Alors $Df = \mathbb{R}$

4.2.2 Limites aux bornes

Propriété 4.2.1

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

4.2.3 Branches infinies

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc la droite d' ?quation $y = 0$ est une asymptote horizontale en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ alors l'axe (OY) est une branche parabolique en $+\infty$

4.2.4 Dérivée et sens de variation

Thèoréme 4.2.1 *La fonction exp est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}$ *on a :*
$(exp)'(x) = (e^x)' = e^x$.

Preuve 4.2.1
La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ *et* $\forall x > 0$, $ln'(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0$ *donc la fonction exp est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *car étant la bijection réciproque de la fonction ln.*

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, (exp)'(y) &= \frac{1}{(\ln)'(x)} \quad avec \quad \ln x = y \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x}} \\ &= x \\ &= e^y \end{aligned}$$

- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$.
- alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

4.2.5 Tableau de variations

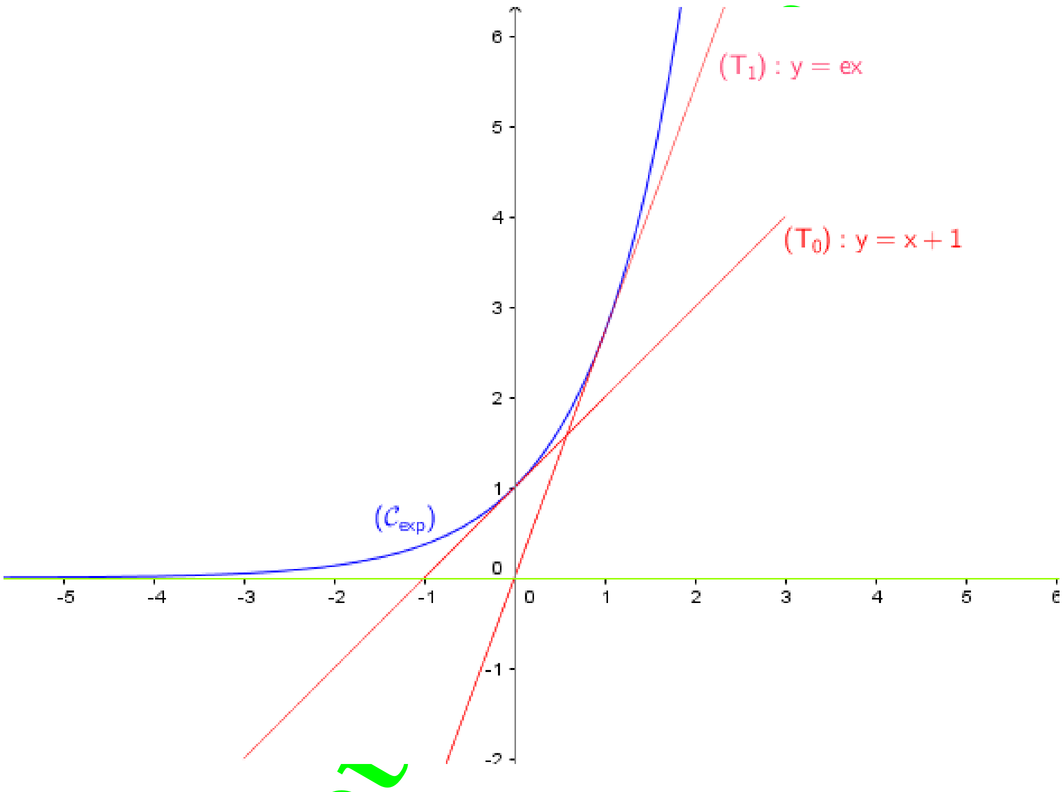
4.2.6 Equation de la tangente en 0 et en 1

- La tangentes à $(\mathcal{C}_{exp})$ d'abscisses 0 a pour équation : $(T_0) : y = ex$
- La tangentes à $(\mathcal{C}_{exp})$ d'abscisses 1 a pour équation : $(T_1) : y = x + 1$

4.2.7 Tableau des valeurs

x	-0,5	0	1	2
e^x	0,6	1	2,7	7,4

4.2.8 Courbe représentative de la fonction exp



4.2.9 Autres limites usuelles

- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$; • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0$; • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4.3 Fonctions composées avec exp : $f(x) = e^{U(x)}$

Soit $f(x) = f(x) = e^{U(x)}$.

4.3.1 Domaine de définition

$f(x) = e^{U(x)}$ existe $\Leftrightarrow U(x)$ existe. Alors $Df = DU$

4.3.2 limites $\lim\limits_{x \to a} e^{U(x)}$

$$\begin{cases} Si \quad \lim\limits_{x \to a} U(x) = l \\ \quad et \\ \lim\limits_{x \to l} e^x = l' \end{cases} \qquad \text{alors } \lim_{x \to a} e^{U(x)} = l'$$

☞ **Exemple 4.3.1** *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition et les limites aux bornes :*

a) $f(x) = x - e^x$ *; b)* $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *; c)* $h(x) = x + e^{-x}$ *; c)* $i(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 2}$ *;*

d) $j(x) = e^{\frac{x-3}{x+2}}$ *; e)* $k(x) = \dfrac{x-3}{x+2}e^x$ *; f)* $l(x) = \ln(e^x - 7 + 6e^{-x})$

4.3.3 Dérivées

Propriété 4.3.1 *Si U est dérivable sur un intervalle I alors e^U est dérivable sur I et on a $\left(e^U\right)' = U'e^U$ c-a d $\forall x \in I$, $\left(e^{U(x)}\right)' = U'(x)e^{U(x)}$*

☞ **Exemple 4.3.2** *Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :*

a) $f(x) = e^{\frac{2x}{x+1}}$ *; b)* $f(x) = e^{2x+3}$ *; c)* $f(x) = ln(1 + e^x)$ *; d)* $f(x) = e^{-x}$ *;*

e) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *; g)* $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

4.3.4 Primitives

Propriété 4.3.2 *Si U est dérivable sur un intervalle I alors $U'e^U$ admet sur I des primitives F la forme $F = e^U + k$ avec k une constante réelle.*

☞ **Exemple 4.3.3** *Déterminer les primitives de la fonction f définie par :*
$f(x) = (x - 1)e^{3x^2 - 6x + 1}$.

☞**Exercice d'application 4.3.1** *Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{e^x + 1}$.*

1. Déterminer Df et calculer les limites aux bornes de Df.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{e^{-x} + 1}$.

3. Montrer que $(\mathcal{C}f)$ admet deux asymptotes obliques (D_1) et $D_2)$ respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}f)$ part rapport à (D_1) et D_2).
5. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
6. Construire $(\mathcal{C}f)$, (D_1) et D_2)

4.4 Fonctions puissances (fonction exponentielle de base a)

Définition 4.4.1 *Soit a un réel strictement positif. On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp_a x = a^x$*

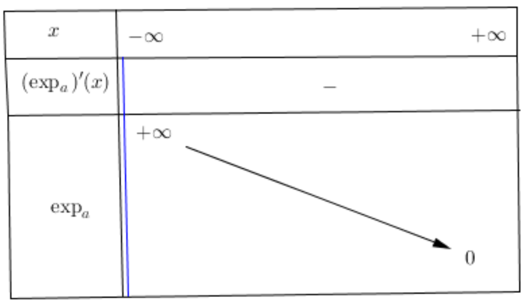
NB : $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$
- Si $a = 1$, $f(x) = 1$: fonction constante .
- Si $a = e$, $f(x) = e^x$: fonction exponentielle.

Propriété 4.4.1 *Soient $a > 0$, x et y deux réels. On a :*
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$;
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;

4.4.1 Dérivée et sens de variations

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$ on a :
$f'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a} = a^x \ln a$.
On sait que $a^x > 0$ alors $f'(x)$ est du même signe de $\ln a$
- Si $a \in]0;1[$.

♣ $\ln a < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ alors $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
♣ $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$
♣ $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = 0$
♣ Tableau de variations



- Si $a > 1$.

♣ $\ln a > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ alors $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
♣ $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$

♣ $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$
♣ Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$(\exp_a)'(x)$		$+$	
$\exp_a$	0	$\nearrow$	$+\infty$

☞**Problème 1**

Partie A : Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(x+1)$.
1. Déterminer le domaine de définition Dg de g puis étudier les limites aux bornes de Df.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ et que $3,6 < \alpha < 4$.
5. Déterminer le signe de g.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \begin{cases} f(x) = (1-x)e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(unité 2 cm)

1. Déterminer le domaine de définition Df de f.
2. Calculer les limites aux bornes de Df.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
4. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.
5. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
6. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
7. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [\alpha; +\infty[$.
1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. Calculer $h(4)$ puis $(h^{-1})'(ln(\sqrt{5}))$.
4. Construire $(\mathcal{C}h^{-1})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

==================================

☞**Problème 2**

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + 1$.
1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g.

2. Dresser le tableau de variation de g.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) > 0$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si \quad x < 0 \\ f(x) = x(1-\ln x)^2 & si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.(unité 2 cm)

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites aux bornes de Df.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
4. Montrer que la droite (D) déquation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote à $(\mathcal{C}f)$ en $-\infty$.
(On pourra poser $X = \dfrac{1}{x}$)
5. Etudier la nature de la branche infinies en $+\infty$.
6. Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$.
7. Dresser le tableau de variation de f.
8. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [e; +\infty[$.
1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. Dresser le tableau de variation de h^{-1}, la bijection réciproque de h.
2. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. Calculer $h(e^2)$ puis $(h^{-1})'(e^2)$.
4. Construire $(\mathcal{C}h^{-1})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Inspection d'Académie de Saint-Louis **Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé **Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté

Série n°4 : Fonction Exponentielle

☞Exercice 1

1. On considère $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$.
   a) Calculer $P(2)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   - $3e^{3x} - 8e^{2x} - e^x + 10 = 0$
   - $3e^{3x} - 8e^{2x} - e^x + 10 \geq 0$.

☞Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   a) $e^{x+1} - e^{2x+1} = 0$
   b) $2e^{x+1} - e^{x+3} = 0$
   c) $e^{2x} - 3e^x - 4 \leq 0$
   d) $e^{2x} + \dfrac{1}{e^{-x}} - 2 = 0$.

☞Exercice 3

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{2x} - 1$.
   a) Etudier les variations de f.
   b) Démontrer que sur $\left[-1; -\dfrac{3}{4}\right]$, l'équation
   $f(x) = x$ admet une unique solution λ.
   c) Montrer que pour tout x de l'intervalle
   $\left[-1; -\dfrac{3}{4}\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a) Démontrer par récurrence que pour tout n,
   $$-1 \leq u_n \leq -\frac{3}{4}.$$
   b) Montrer que pour tout n, on a :
   $$|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|u_n - \lambda|.$$
   c) En déduire que $|u_n - \lambda| \leq \dfrac{1}{2^{n+2}}$.
   d) Etudier la convergence de la suite (u_n).

☞Problème 1

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -\dfrac{2}{1+x^2} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

1. Etudier les variations de g et dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 0,6$.
3. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) & si \quad x > 0 \\ f(x) = -(x+1)e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de celui-ci.
2. Etudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement les résultats.
3. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
4. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
5. Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f.
6. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.
7. Tracer $(\mathcal{C}f)$. (On prendra α=0,5 et unité=2 cm)
On précisera l'équation de la tangente au point d'abscisse -1.
8. Soit h la restriction de f sur $]-\infty; 0[$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de

$]-\infty;0[$ sur un intervalle J à péciser.

b) Tracer $(\mathcal{C}h^{-1})$ la courbe de h^{-1} dans le même repère.

☞**Problème 2**

Partie A : On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x} + \ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
3. Calculer $g(1)$. En déduire le signe g.

Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} f(x) = x - e^{x-1} & si \quad x \leq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ puis Calculer les limites aux bornes de Df.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats.
3. Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
6. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à son asymptote oblique.
7. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on placera le point de $\mathcal{C}f$ d'abscisse 4

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]1;+\infty[$ 1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

2. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. Calculer $h(2)$ puis $(h^{-1})'(\ln 2)$.
4. Construire $(\mathcal{C}h^{-1})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

☞**Problème 3**

Partie A : Soit $g(x) = 2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de la fonction g.
2. Montrer que $g(x)$ est strictement positif sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & si \quad x > 0 \\ f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Prouver que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier les branches infinies de g.
4. Montrer que pour $x > 0$ on a : $f'(x) = xg(x)$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Construire la courbe de g et celle de sa réciproque dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☞**Problème 4**

Partie A : Soit u la fonction définie par :

$$u(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. Dresser le tableau de variations de u.
2. En déduire le signe de $u(x)$.

Partie B : On considère la fonction g définie par $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{2+2\ln x}{x} & si \quad x > 0 \\ (1-2x)e^{2x} & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

1. Justifier que le domaine de définition Df de f est $\mathbb{R}$ puis calculer les limites aux bornes de Df.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}f)$.
4. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à l'asymptote oblique sur $]0;+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que $e^{-2} < \alpha < e^{-1}$
6. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☞**Problème 5**

Partie A : On considère la fonction g définie par $g(x) = (1-x)\,e^{-x} - 1$.

2. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
3. Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -x + e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \ln|x^2 - 1| & si \quad x > 0 \end{cases}$
On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
1. Déterminer le domaine de définition Df de f puis calculer les limites aux bornes de Df.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Etudier les branches infines de $(\mathcal{C}f)$.
4. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer, lorsqu'ils existent les points d'intersection de $(\mathcal{C}f)$ avec l'axe des abscisses.
6. Montrer qu'il existe un unique point G de $(\mathcal{C}f)$ en le quel la tangente (T) est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = -x$. Donner une équation de cette tangente (T).
7. Construire $\mathcal{C}f$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0; 1[$.
1. Montrer que h admet une bijection h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ J
2. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
3. h^{-1} est-elle dérivable en $y_0 = 0$? en $y_0 = \ln\dfrac{3}{4}$? Si oui donner une équation de la tangente ou demi-tangente au point d'abscisse y_0.
4. Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
5. Construire $(\mathcal{C}h^{-1})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

« L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit»

Aristote

CHAPITRE 5 Suites Numériques

Introduction historique

Dès l'Antiquité, **Archimède de Syracuse(-287 ;-212)**, met en oeuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre π. Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, **Archimède** donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.
Vers la fin du $XVIIe$ siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pouir des problèmes de longueurs, d'aires,...
Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaitra qu'au début du $XIXe$ siècle avec le mathématicien français **Augustin Louis Cauchy (1789 ; 1857)**.

Augustin Louis Cauchy (1789 ; 1857)

5.1 Généralités

Définition 5.1.1 *On appelle suite numérique toute application d'une partie non vide $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rcl} U : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & U(n) \end{array}$$

$\mathbb{I}$ *est appelé l'ensemble de départ de la suite ou l'ensemble des indices de la suite.*

☞ ***Exemple 5.1.1*** $\begin{array}{rcl} U : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$

On a alors $U(n) = n^2 + 1$. U est une suite numérique

***Notation** :*

- *On note U_n au lieu de $U(n)$ l'image de n par U .*
- *U_n se lit "U indice n" ou simplement "U_n".*
- *La suite U se note $(U_n)_{n\in\mathbb{I}}$ ainsi les images des entiers $0; 1; 2; 3; \ldots$ se notent respectivement $U_0; U_1; U_2; \ldots$.*
- *$U_0; U_1; U_2; \ldots$ sont appelés les termes de la suite.*
- *Si U_0 existe, il sera appelé le 1^e terme de la suite.*

☞ ***Exemple 5.1.2***

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \dfrac{2n}{n+1}$. Calculer les 4 premiers termes de la suite.

Corrigé

Pour $n = 0$ on a : $U_0 = \dfrac{2\times 0}{0+1} = 0$

Pour $n = 1$ on a : $U_1 = \dfrac{2\times 1}{1+1} = 1$

Pour $n = 2$ on a : $U_2 = \dfrac{2\times 2}{2+1} = \dfrac{4}{3}$

Pour $n = 3$ on a : $U_3 = \dfrac{2\times 3}{3+1} = \dfrac{3}{2}$

Remarque 5.1.1

- *U_n traduit le terme général de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{I}}$.*
- *Si $a \in \mathbb{N}$ et on a la suite $(U_n)_{n\geq a}$ alors U_a est le premier terme de la suite.*
- *Si $a \in \mathbb{N}$ et on a la suite $(U_n)_{n>a}$ alors U_{a+1} est le premier terme de la suite.*

5.1.1 Suite définie par une forme explicite

On dit qu'une suite est définie d'une manière explicite si on peut calculer un terme quelconque sans connaître les autres.

☞ **Exemple 5.1.3** *La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sqrt{n^2+1}$ est définie de manière explicite.*

5.1.2 Suite définie par une forme formule de recurrence

Activité 5.1.2.1

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases}$

Calculer les 4 premiers termes de la suites.

Corrigé

On a $U_0 = 1$.

Pour $n = 0$ on a : $U_{0+1} = 3U_0 + 1 \Rightarrow U_1 = 3U_0 + 1 = 3\times 1 + 1 = 4 \Rightarrow U_1 = 4$

Pour $n = 1$ on a : $U_{1+1} = 3U_1 + 1 \Rightarrow U_2 = 3U_1 + 1 = 3\times 4 + 1 = 13 \Rightarrow U_2 = 13$

Pour $n = 2$ on a : $U_{2+1} = 3U_2 + 1 \Rightarrow U_3 = 3U_2 + 1 = 3\times 13 + 1 = 40 \Rightarrow U_3 = 40$.

On sait que chaque terme de cette suite se déduit à partir du terme précédent. Une telle suite est dite définie par récurrence.

5.2 Monotonie d'une suite

5.2.1 Suite croissante-Suite décroissante

Définition 5.2.1 *Une suite $(U_n)_{n\geq n_0}$ est dite :*
- ***croissante*** *si $\forall n \geq n_0$ on a $U_{n+1} \geq U_n$ (oubien $U_{n+1} - U_n \geq 0$).*
- ***décroissante*** *si $\forall n \geq n_0$ on a $U_{n+1} \leq U_n$ (oubien $U_{n+1} - U_n \leq 0$).*
- ***constante*** *si $\forall n \geq n_0$ on a $U_{n+1} = U_n$ (oubien $U_{n+1} - U_n = 0$).*

Une suite est dite ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante.*
NB *: Les inégalités peuvent être strictes et dans ce cas on dira que la suite est* ***strictement croissante*** *ou* ***strictement décroissante***

Remarque 5.2.1 *Pour étudier les variations de (U_n) on peut étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.*

☞ **Exemple 5.2.1**
Etudier la monotonie des suites suivantes :
a) (U_n) la suite définie par $U_n = 3n + 2$.
b) (V_n) la suite définie par $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = \sqrt{6 + V_v} \quad \text{avec} \quad V_n \in [0;3] \end{cases}$

Corrigé
a) $U_n = 3n+2$. Calculons $U_{n+1} - U_n$. On a : $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) + 2 - 3n - 2 = 3 > 0$ donc la suite (U_n) est strictement croissante.
b) Calculons $V_{n+1} - V_n$. On a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \sqrt{6 + V_n} - V_n \\ &= \frac{6 + V_n - V_n^2}{\sqrt{6 + V_n} + V_n} \end{aligned}$$

Cherchons le signe de $6 + V_n - V_n^2$. Posons $6 + V_n - V_n^2 = 0$. $\Delta = 25$ donc $V_{n_1} = 3$ et $V_{n_1} = -2$. D'où le tableau de signe suivant :

V_n	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$6 + V_n - V_n^2$	-	+	+	+	-
$V_{n+1} - V_n$	$-$	+	+	+	-

On a $V_{n+1} - V_n \geq 0, \quad \forall V_n \in [0;3]$ donc (V_n) est croissante .

Remarque 5.2.2 *Si $U_n = f(n)$ alors $(U_n)_{n\geq a}$ a les mêmes variations que f sur $[a; +\infty[$*

☞ **Exemple 5.2.2** *Soit $(U_n)_{n\geq 3}$ la suite de terme général $U_n = \dfrac{n-1}{n-2}$*

Remarque 5.2.3 *Si Tous les termes de la suite (U_n) sont tous positifs, pour déterminer sa monotonie, il suffit de comparer $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ avec 1.*
- *Si $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ alors (U_n) est strictement croissante ;*
- *Si $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors (U_n) est strictement décroissante ;*

☞ **Exemple 5.2.3** $U_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Thèoréme 5.2.1 *Si $U_{n+1} = f(U_n)$, on peut raisonner par récurrence en utilisant les variations de f.*
- *Si $U_1 > U_0$ et f est croissante alors (U_n) est croissante ;*
- *Si $U_1 < U_0$ et f est décroissante alors (U_n) est décroissante ;*
- *Si f est décroissante alors (U_n) n'est ni croissante ni décroissante ;*

☞ **Exemple 5.2.4** *Soit (U_n) la suite définie par* $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

5.2.2 Suite périodique

Définition 5.2.2 *On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in I}$ est périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que : $\forall n \in I$ on ait $U_{n+p} = U_n$.*

☞ ***Exemple 5.2.5*** *La suite définie par $U_n = (-1)^n$ est périodique de période de période 2 par : $U_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n = U_n$.*

5.2.3 Suite majorée-suite minorée-minorée bornée

Définition 5.2.3
- *Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in I : U_n \leq M$.*
  Le réel M est appelé un majorant de la suite (U_n).
- *Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \in I : U_n \geq m$.*
  Le réel m est appelé un minorant de la suite (U_n).
- *Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in I : m \leq U_n \leq M$.*

☞ ***Exemple 5.2.6***
Soit (U_n) la suite de terme gérérale $U_n = \frac{n+1}{n+2}$. Montrer que :
a) U_n est minorée par 0.
b) U_n est majorée par 1.
c) U_n est bornée.
Corrigé

5.3 Principe du raisonnement par récurrence

Soit à démontrer une proposition $(\mathcal{P}_n)$ dépendant d'un entier naturel n.

•On vérifie d'abord que la proposition est vraie au premier rang i.e à la plus petite indice ;

• On suppose qu'elle est vraie au rang n ;

•On montre qu'elle est vraie au rang $n+1$;

conclusion : On dit que la propriété est **héréditaire** c'est-à-dire elle est vraie quelque soit n.

☞ **Exemple 5.3.1**

1. Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq 6$.

2. Montrer que $\forall n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

5.4 Convergence d'une suite

Définition 5.4.1

- *Une suite (U_n) est dite **convergente** s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$.*
- *Si la limite n'existe pas alors on dit que (U_n) est une suite **divergente***

On retrouve toutes les propriétés des opérations sur les limites.

Thèoréme 5.4.1 $\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow l \geq 0}$

Thèoréme 5.4.2 $\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \\ \lim\limits_{n\to\infty} V_n = l' \\ U_n \leq V_n \end{cases} \Longrightarrow l \leq l'}$

Thèoréme 5.4.3 $\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} V_n = l \\ \lim\limits_{n\to\infty} W_n = l \\ U_n \leq V_n \leq W_n \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = l}$

Thèoréme 5.4.4 $\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0 \\ |Un - l| \leq V_n \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = l}$

Thèoréme 5.4.5 *Soient (U_n), (V_n) deux suites.*

$$\boxed{\begin{cases} Un \leq V_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = -\infty}$$

$$\boxed{\begin{cases} Un \geq V_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} V_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty}$$

Thèoréme 5.4.6 *Toute suite convergente est bornée mais la réciproque n'est pas vraie en général.*

Thèoréme 5.4.7 (de la convergence monotone)
• *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
• *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

☞ **Exemple 5.4.1** *Étudier la convergence des suites (U_n) définies par :*
a) $U_n = \dfrac{-3n^2+4n-1}{n^3+1}$ *; b)* $U_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *; c)* $U_n = \dfrac{2+\sin n}{n^2}$

5.5 Suite du type $U_{n+1} = f(U_n)$

5.5.1 Représentation des premiers termes

Activité 5.5.1.1 *Soit (U_n) la suite définie par* $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$

1. Représenter les 4 premiers termes de la suite.
2. Que peut-on conjecturer.
Corrigé
1. Le plan est muni du repère (O, I, J). Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{2+x}$ et Δ la droite d'équation $y = x$.
Construction de U_1
Soit M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $U_0 = \dfrac{1}{2}$; l'ordonnée de M_0 est $U_1 = f(U_0)$.
Soit P_0 le point de (Δ) d'ordonnée U_1 ; l'abscisse de P_0 est U_1.
Construction de U_2
Soit M_1 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse U_1 ; l'ordonnée de M_1 est $U_2 = f(U_1)$.
Soit P_1 le point de (Δ) d'ordonnée U_2 ; l'abscisse de P_0 est U_2.
Cette méthode permet une construction, de proche en proche sur l'axe (OI), des termes d'une suite définie par une formule de récurrence. 2. D'après le graphique, on peut conjecturer que lorsque n prend des valaurs de plus en plus grandes, U_n s'approche de l, donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.

5.5.2 Limites éventuelles

Thèoréme 5.5.1 *Si (U_n) est une suite convergente vers l et f une fonction continue en l. Sachant que $U_{n+1} = f(U_n)$ alors l vérifie l'équation $f(l) = l$.*

☞ **Exemple 5.5.1** *Soit (U_n) la suite définie par* $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 2$.
2. Montrer que $\forall U_n \in [0; 2]$ on a : $U_{n+1} \in [0; 2]$ $(f([0; 2]) \subset [0; 2])$.
3. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
4. En déduire que (U_n) converge vers un réel à déterminer.

☞**Exercice d'application 5.5.1**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$.

b. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

c. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|x - \alpha|$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

d. En déduire que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.

e. Déterminer le plus petit entier p tel que $|u_p - \alpha| \leq 10^{-6}$. Que représente α pour U_p ?

5.5.3 Suites adjacentes

Définition 5.5.1 *Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes ssi*

$$\begin{cases} U_n \leq V_n \\ (U_n) \quad \textit{croissante} \\ (V_n) \quad \textit{décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n \end{cases}$$

5.6 Suites usuelles

5.6.1 Suite arithmétique

Définition 5.6.1 *Une suite (U_n) est dite arithmétique s'il existe une constante réelle (ou complexe) r telle que $U_{n+1} - U_n = r$ ou $U_{n+1} = U_n + r$.*
*Le nombre réel r ainsi défini est appelé la **raison** de la suite.*

☞ **Exemple 5.6.1** *Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 7n + 3$. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique.*

5.6.2 Expression de U_n en fonction de n

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0. On a alors : $U_{n+1} - U_n = r \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + r$.

$$\begin{cases} U_1 - U_0 = r \\ U_2 - U_1 = r \\ U_3 - U_2 = r \\ \ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ U_n - U_{n-1} = r \end{cases}$$

En faisant la somme des égalités membre à membre et en simplifiant, on obtient : $U_n - U_0 = nr \Leftrightarrow \boxed{U_n = U_0 + nr}$

Propriété 5.6.1 *Soit* (U_n) *une suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* U_0*.*
On a : $U_n = U_0 + nr$ *;* $U_n = U_1 + (n-1)r$*.*
De manière général on a : $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$*.*

☞ **Exemple 5.6.2** *Soit* (U_n) *une suite arithmétique de raison* 3*. Dans chacun dans cas ci-dessous, exprimer* U_n *en fonction de* n*.*

a) le 1^e *terme est* $U_0 = 2$ *;*
b) le 1^e *terme est* $U_1 = 5$ *;*
d) le 1^e *terme est* $U_3 = 6$ *;*

☞ **Exemple 5.6.3** *Soit une suite arithmétique de* 1^e *terme* U_0 *et de raison* r *telle que le* 5^e *terme est* -26 *et le* 11^e *terme est* 30*. Déterminer* U_0*,* r *et le* 30^e *terme.*

5.6.3 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 5.6.2
$\forall n \in \mathbb{N}$*, on a :* $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Preuve 5.6.1 *Posons* $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ 2S &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)(n+1) + (n+1) \\ 2S &= n(n+1) \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Propriété 5.6.3
Soit (U_n) *une suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* U_0*.*

- $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = (n+1)\left(\dfrac{U_0 + U_n}{2}\right)$.
- $U_1 + U_2 + \ldots + U_n = n\left(\dfrac{U_1 + U_n}{2}\right)$.
- $U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = (n-p+1)\left(\dfrac{U_p + U_n}{2}\right)$.

$$\boxed{STCSA = nombredetermes\left(\frac{Premierterme + Dernierterme}{2}\right)}$$

avec nombre de termes=indice du dernier terme-indice du premier+1

Preuve 5.6.2 (U_n) *une suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* U_0*. On a :*
$S = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} + U_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 + nr$

$$\begin{cases} U_0 = U_0 \\ U_1 = U_0 + r \\ U_2 = U_0 + 2r \\ \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ U_n = U_0 + nr \end{cases}$$

En faisant la somme des égalités membre à membre $S = (n+1)U_0 + r + 2r + 3r + \ldots + nr$

$$\begin{aligned} S &= (n+1)U_0 + r + 2r + 3r + \ldots + nr \\ &= (n+1)U_0 + r(1+2+3+\ldots+n) \\ &= (n+1)U_0 + r(1+2+3+\ldots+n) \\ &= (n+1)U_0 + r\frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left[U_0 + \frac{nr}{2}\right] \\ &= (n+1)\left[\frac{2U_0 + nr}{2}\right] \\ &= (n+1)\left[\frac{U_0 + U_0 + nr}{2}\right] \\ &= (n+1)\left[\frac{U_0 + U_n}{2}\right] \end{aligned}$$

☞ **Exemple 5.6.4**
Soit (U_n) *la suite définie par* $U_n = 2n + 5$ *et* $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.
1. Montrer que (U_n) *est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.*
2. Exprimer S_n *en fonction* n.

Remarque 5.6.1 *Trois réels* a, b *et* c *dans cet ordre sont en progression arithmétique ssi* $\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$.
La raison de cette suite est $\boxed{r = b - a = c - b}$

5.6.4 Suite géométrique

Définition 5.6.2 *La suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{I}}$ *est dite **géométrique** s'il existe une constante* q *telle que* $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ *ou* $V_{n+1} = qV_n$. *Le nombre réel (ou complexe) ainsi défini est appelé la raison de la suite.*

☞ **Exemple 5.6.5** *Soit* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ *Montrer que* (V_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme*

5.6.5 Expression de U_n en fonction de n

Soit (V_n) une suite arithmétique de raison q et de premier terme V_0. On a alors : $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$.

$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_0} = q \\ \frac{V_2}{V_1} = q \\ \frac{V_3}{V_2} = q \\ \vdots \quad \vdots \\ \frac{V_n}{V_{n-1}} = q \end{cases}$$

En faisant le produit des égalités membre à membre et en simplifiant, on obtient : $V_n = V_0 q^n$

Propriété 5.6.4 *Soit (V_n) une suite géométique de raison q et de premier terme V_0. On a alors : $V_n = V_0 q^n$; $V_n = V_1 q^{n-1}$.*
De manière générale on a : $\boxed{V_n = V_p q^{n-p}}$

☞ **Exemple 5.6.6** *1) Soit (V_n) une suite géométique de raison $\frac{5}{4}$. Dans chacun dans cas ci-dessous, exprimer V_n en fonction de n.*
a) le 1^e terme est $V_0 = 2$;
b) le 1^e terme est $V_5 = 3$;
2) Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $W_n = 5^{-n}$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

5.6.6 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 5.6.5 *Soit $q \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a :*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve 5.6.3 *Posons $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$*

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n \\ -qS & = & -q - q^2 - \ldots - q^n - q^{n+1} \end{array}$$

En faisant la somme des égalités membre à membre et en simplifiant on obtient

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriété 5.6.6 *Soit (V_n) une suite géométique de raison q et de premier terme V_0. On a alors :*

- $V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$

- $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V_1\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$
- $V_p + V_{p+1} + \ldots + V_n = V_p\left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$
- $\boxed{STCSG = Premierterme\left(\dfrac{1-q^{nombredetermes}}{1-q}\right)}$

Preuve 5.6.4 *(V_n) est une suite géométique de raison q et de premier terme V_0. On a alors : $V_n = V_0q^n$*

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n &= V_0q + V_0q^2 + V_0q^3 + \ldots + V_0q^n \\ &= V_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) \\ &= V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \end{aligned}$$

Remarque 5.6.2 *Trois réels a, b et c dans cet ordre sont en progression géométique ssi $\boxed{b^2 = ac}$.*

La raison de cette suite est $\boxed{q = \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}}$

5.6.7 Convergence d'une suite géométrique

Thèoréme 5.6.1

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 \quad si \quad |q| < 1 \\ +\infty \quad si \quad q > 1 \\ n'existe\ pas\ si \quad q \leq -1 \end{cases}}$$

☞ **Exemple 5.6.7** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-4)^n$ *n'existe pas* ; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$

☞**Exercice d'application 5.6.1** *Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par* $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{5}U_n + \dfrac{4}{5} \end{cases}$

1. On pose $V_n = U_n - 1$. Démontrer que (V_n) est une suite géométique.
2. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
3. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.
Exprimer S_n puis T_n en fonction de n.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

☞**Exercice d'application 5.6.2**
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{2x} - 1$.
a) Etudier les variations de f.
b) Démontrer que sur $\left[-1; -\dfrac{3}{4}\right]$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution λ.

c) Montrer que pour tout x de l'intervalle $\left[-1;-\frac{3}{4}\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout n, $-1 \leq u_n \leq -\frac{3}{4}$.

b) Montrer que pour tout n, on a : $|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|u_n - \lambda|$.

c) En déduire que $|u_n - \lambda| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$.

d) Etudier la convergence de la suite (u_n).

e) Déterminer le plus petit entier p tel que $|u_p - \lambda| \leq 10^{-3}$.

☞**Exercice d'application 5.6.3** *(BAC 1999 S2)*

Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = e^{1-\frac{n}{2}}$.

1. a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Justifier que la suite (V_n) définie par $V_n = \ln U_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ et $P_n = U_0 U_1 U_2 \times \ldots \times U_n$.

a. Exprimer S_n et P_n en fonction de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

☞**Exercice d'application 5.6.4** *(BAC 2008 S2)*

Soit $a = -i - 1$ et (z_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 = i \\ z_{n+1} = (1-i)z_n + az_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Déterminer z_1 et z_2 sous forme algébrique.

2. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = z_{n+1} - z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a. Déterminer U_0 et U_1

b. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique de raison a.

c. Exprimer U_n en fonction de n et a.

3. Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

Exprimer S_n en fonction de z_n. En déduire que $z_n = -1 + (1+i)^n$

☞**Exercice d'application 5.6.5** *Soit (U_n) la suite définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases}$$

On se propose d'étudier la suite (U_n) par deux méthodes.

<u>Première méthode</u>

1. Justifier que $U_n \geq -\frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Etudier le sens de variation de (U_n).

3. En déduire que la suite (U_n) converge et déterminer sa limite.

<u>Deuxième méthode</u>

Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 1}$.

1. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

2. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
3. En déduire la convergence de U_n .

☞**Exercice d'application 5.6.6** *On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :*

$$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \ln(U_n) - 2$$

1. Calculer U_1 et V_1.
2. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
4. Etudier la convergence des suites U_n et (V_n).

CHAPITRE 6

Calcul Intégral

6.1 Définition et Propriétés

Définition 6.1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a et b étant deux réels de I. Soit F une primitive de f sur I. On appelle **intégrale** (ou **somme**) de f entre a et b, le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ est défini par :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

- $\int_a^b f(x)dx$ *se lit "intégral de a à b de $f(x)dx$ "*

☞ **Exemple 6.1.1** *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I = \int_0^1 (x^2 + x + 3)dx \text{ ; } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \text{ ; } K = \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx \text{ ; } L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

Remarque 6.1.1

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$
- *F est une primitive de f $\Leftrightarrow$ $F(x) = \int f(x)dx$*

Propriété 6.1.1 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$. α et β sont deux réels.*

Relation de Chasles

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Linéarité

- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Inégalité et intégrale

- *Si $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$*

☞ **Exemple 6.1.2** *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I = \int_2^3 3x^2 dx \text{ ; } J = \int_0^2 |x-1|dx \text{ ;}$$

Propriété 6.1.2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a;a]$.*

- *Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$*
- *Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$*

6.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 6.2.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel noté μ et défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx$*

☞ **Exemple 6.2.1** *Déterminer la valeur moyenne de $f(x) = \sin x$ sur $[0;\pi]$*

6.2.1 Inégalités de la moyenne

Thèoréme 6.2.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.*
S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq M(b-a)$$

☞ **Exemple 6.2.2** *Soit $f(x) = \cos x$.*
Montrer que $\forall x \in [0;2\pi]$, $a - b \leq \sin b - \sin a \leq b - a$

6.3 Techniques de calcul

6.3.1 Intégration par parties

Thèoréme 6.3.1 *Soient U et V deux fonctions dérivables sur $[a;b]$. On a :*

$$\int_{a}^{b} U'(x)V(x)dx = [(UV)(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} V'(x)U(x)dx$$

Preuve 6.3.1

Remarque 6.3.1 *Si on a :*

- *Pôlynome et ln alors on pose $U' =$ Pôlynome et $V = ln$*
- *Pôlynome et exp alors on pose $U' = exp$ et $V =$ Pôlynome*

☞ **Exemple 6.3.1** *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I = \int_{1}^{2} x^2 \ln x dx \text{ ; } J = \int_{0}^{1} xe^x dx$$

Double intégration par parties

$$K = \int_{0}^{1} x^2 e^x \text{ ; } L = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

6.4 Calcul d'aires et de volumes

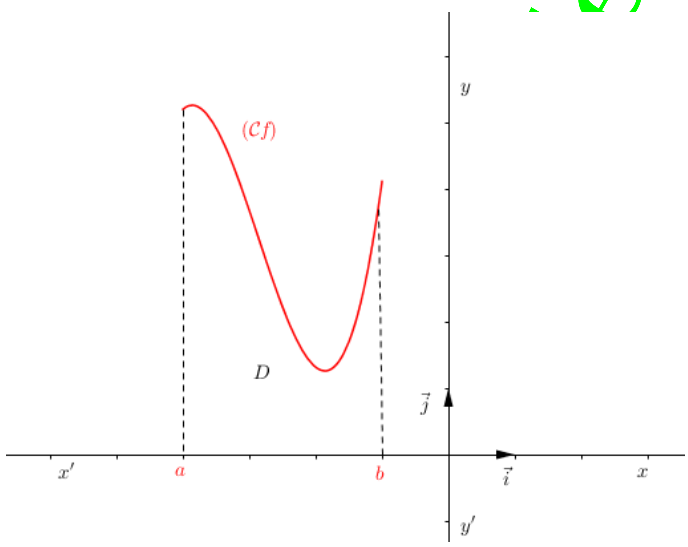
6.4.1 Signe d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux éléments de I.

- Si $f \geq 0$ et $a \leq b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq 0$ et $a \geq b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- Si $f \leq 0$ et $a \leq b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- Si $f \leq 0$ et $a \geq b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

6.4.2 Calcul d'aires

Cas 1 : f est une fonction continue et positive sur $I = [a; b]$

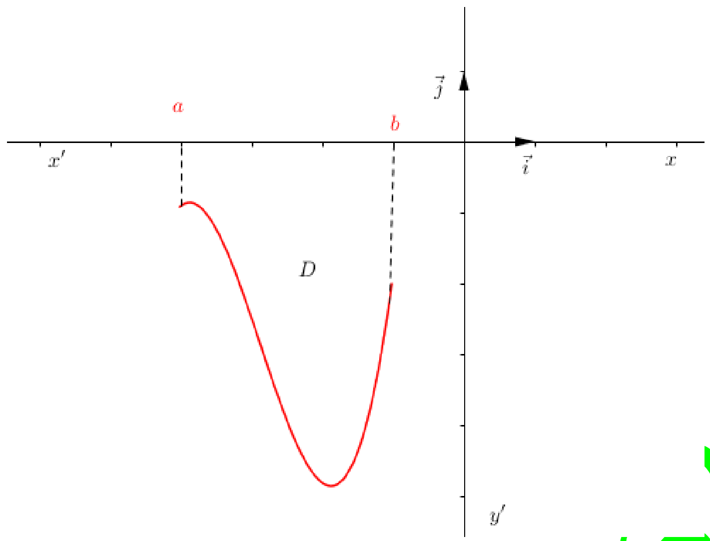


D : domaine hachuré : C'est le domaine délimité par $(\mathcal{C}f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. $D = \{M(x; y)/a \leq x \leq b \ et\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine D est définie par $\mathcal{A} = \left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right) \times U.a$

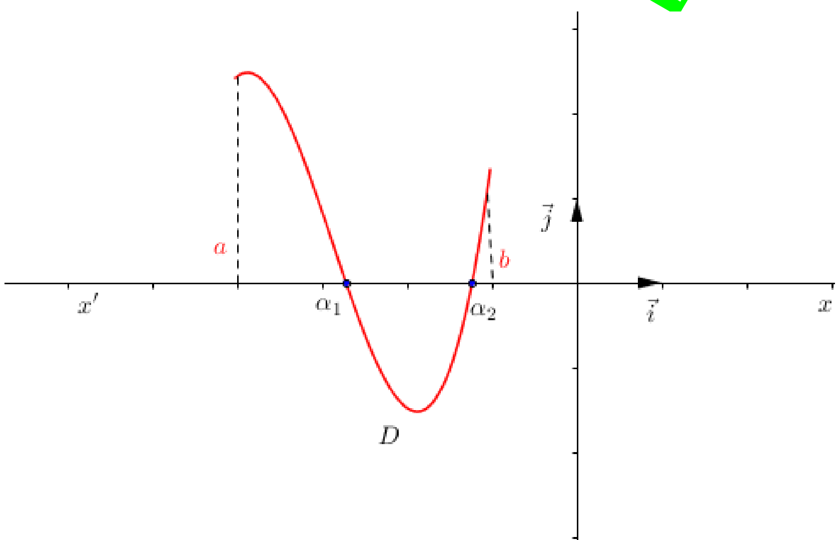
$U.a = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$: unité d'aire

Cas 2 : f est une fonction continue et négative sur $I = [a; b]$



$D = \{M(x;y)/a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}$.
L'aire $\mathcal{A}$ du domaine D est définie par $\mathcal{A} = -\left(\int_a^b f(x)dx\right) \times U.a$

Cas 3 : f est une fonction continue et change de signes sur $I = [a;b]$



$$\mathcal{A} = \left(\int_a^{\alpha_1} f(x)dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^{b} f(x)dx\right) \times U.a$$

Cas 4 : f et g sont deux fonctions continues sur $I = [a;b]$
D : domaine hachuré : C'est le domaine délimité par $(\mathcal{C}f)$, $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. $D = \{M(x;y)/a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}$.
L'aire $\mathcal{A}$ du domaine D est définie par $\mathcal{A} = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right) \times U.a$

6.4.3 Calcul de volumes

Soit f une fonction continue et positive sur $I = [a;b]$ et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans le lan muni d' un repère orhonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{V}$ le volume engendré par la rotation de $(\mathcal{C}f)$ au tour de l'axe des abscisses.

L'aire $\mathcal{S}_x = \pi f^2(x)$ et le volume $\mathcal{V}_x = \mathcal{S}_x dx = \pi f^2(x)dx$. On a alors

$\mathcal{V} = \int_a^b \left(\pi f^2(x)dx\right) \times U.v$ avec $U.v = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||^2$: unité de volume

CHAPITRE 7

Équations différentielles Linéaires

Introduction

Activité 7.0.3.1
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{3x}$.
Calculer $f'(x)$ et déterminer une relation entre f et f'.

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y, z, etc...) dans laquelle apparaîssent certaines dérivées de la fonction y.
y représente f, y' représente f' et y'' représente f''.
• Si dans une équation différentielle n'apparaît que la dérivée première , on dit qu'on a une équation différentielle du premier ordre.
• Si dans une équation différentielle la dérivée seconde apparaît , on dit qu'on a une équation différentielle du second ordre.

7.1 Equation différentielle du premier ordre

7.1.1 Equation différentielle du premier ordre sans second membre ou équation homogène

Définition 7.1.1 *Une équation différentielle du premier ordre sans second membre est une équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme $y' + ay = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.*

☞ **Exemple 7.1.1** $y' + 2y = 0$; $2y' + 3y = 0$; $-5y' + y = 0$

Méthode de résolution

$$\begin{aligned}
y' + ay = 0 &\Leftrightarrow y' = -ay \\
&\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a \\
&\Leftrightarrow \ln|y| = -ax + b \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{-ax+b} \\
&\Leftrightarrow y = \pm e^{b} e^{-ax} \\
&\Leftrightarrow y = ke^{-ax} \textit{ avec } k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Thèoréme 7.1.1 *Soit $(E) : y' + ay = 0$ une équation différentielle du premier ordre sans second membre. La solution générale de (E) est $y = ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

☞ **Exemple 7.1.2** *Résoudre les équations différentielles suivantes $y' - 4y = 0$; $y' + 2y = 0$; $3y' + 2y = 0$; $2y' + y = 0$.*

$$\begin{aligned}
y' - 4y = 0 &\Leftrightarrow y = ke^{-4x}, k \in \mathbb{R} \\
y' + 2y = 0 &\Leftrightarrow y = ke^{2x}, k \in \mathbb{R} \\
3y' + 2y = 0 &\Leftrightarrow 3\left(y' + \frac{2}{3}y\right) = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{3}y = 0 \Leftrightarrow y = ke^{-\frac{2}{3}x}, k \in \mathbb{R} \\
2y' + y = 0 &\Leftrightarrow 2\left(y' + \frac{1}{2}y\right) = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow y = ke^{-\frac{1}{2}x}, k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Solution qui prend la valeur y_0 en x_0

Soit $(E) : y' + ay = 0$ une équation différentielle du premier ordre sans second membre. Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur y_0 en x_0.
On a $(E) : y' + ay = 0 \Leftrightarrow y = ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or $y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = ke^{-ax_0} \Rightarrow k = \dfrac{y_0}{e^{-ax_0}} = y_0e^{ax_0}$.
On a alors : $y = ke^{-ax} \Rightarrow y = y_0e^{ax_0}e^{-ax} = y_0e^{ax_0-ax} = y_0e^{-a(x-x_0)} \Rightarrow \boxed{y = y_0e^{-a(x-x_0)}}$

☞ **Exemple 7.1.3** *Soit $(E) : 2y' - 6y = 0$*
1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe $(\mathcal{C}f)$ passe par le point $A(0, 4)$

7.1.2 Equation différentielle du premier ordre avec second membre

Définition 7.1.2 *Une équation différentielle du premier ordre sans second membre est une équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme $y' + ay = g(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et g est une fonction.*

☞ **Exemple 7.1.4** $y' + 2y = x^2 + 3x$; $2y' + 3y = \cos x + \sin x$; $-5y' + y = e^{2x}$

Méthode de résolution

Thèoréme 7.1.2 *Soit $(E) : y' + ay = g(x)$ une équation différentielle du premier ordre avec second membre. La solution générale de (E) est $y = y_1 + y_2$ où y_1 est solution de équation différentielle $y' + ay = 0$ et y_2 une solution particulière de l'équation $y' + ay = g(x)$.*

☞**Exercice d'application 7.1.1** *Soit $(E) : 2y' + 3y = 6x^2 - 4x + 7$.*
1. Déterminer un polynôme p de degré 2 solution de (E).
2. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E') : $2y' + 3y = 0$.
3. Résoudre (E') et (E).
4. Déterminer la solution g de (E) qui prend la valeur 6 en 0.

7.2 Equation différentielle du second ordre

7.2.1 Equation différentielle du second ordre sans second membre ou équation homogène

Définition 7.2.1
• *Une équation différentielle du premier ordre sans second membre est une équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme* $ay'' + by' + cy = 0$ *avec* a, b *et* c *sont des réels et* $a \in \mathbb{R}$.
• *L'équation du second degré* $ar^2 + br + c = 0$ *est appelée l'équation caractéristique de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$.

☞ **Exemple 7.2.1**

$2y'' + y' + 3y = 0$ *equation caractéristique* $2r^2 + r + 3 = 0$
$-y'' - 3y' + 3y = 0$ *equation caractéristique* $-r^2 - 3r + 3 = 0$

Méthode de résolution

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle du second ordre sans second membre d'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$. On a :

signe de Δ	Solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$	Solution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$
Si $\Delta > 0$	$r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
Si $\Delta = 0$	$r_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$y = (Ax + B)e^{r_0 x}$
Si $\Delta < 0$	$r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta$	$y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

☞**Exercice d'application 7.2.1** *Résoudre :*
a. $y'' + 3y' - 2y = 0$; *b.* $2y'' + 12y' + 18y = 0$; *c.* $y'' - y' + y = 0$; *d.* $y'' - k^2 y = 0$; *e.* $y'' + \omega^2 y = 0$

☞**Exercice d'application 7.2.2**
1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$.
2. Déterminer la solution de (E) *vérifiant* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 3$

Remarque 7.2.1 *Soit* f *une fonction et* $(\mathcal{C}f)$ *sa courbe représentative.*

• $(\mathcal{C}f)$ *passe par le point* $A(x_0; y_0) \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$
• f *prend la valeur* y_0 *en* $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$
• *La tangente à* $(\mathcal{C}f)$ *au point d'abscisse* x_0 *est horizontale* $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
• *La tangente à* $(\mathcal{C}f)$ *au point d'abscisse* x_0 *est parallèle à la droite* $(D) : y = ax + b \Leftrightarrow f'(x_0) = a$
• *La tangente à* $(\mathcal{C}f)$ *au point d'abscisse* x_0 *est perpendiculaire à la droite* $(D) : y = ax + b \Leftrightarrow af'(x_0) = -1$

7.2.2 Equation différentielle du second ordre avec second membre

Définition 7.2.2 *Une équation différentielle du second ordre avec second membre est une équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme $ay'' + by' + cy = k(x)$ avec a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$, k est une fonction non nulle.*

☞ **Exemple 7.2.2** $y''+2y'+3y = e^x - e^{2x}$; $2y''+3y'-y = x^2+2x-3$; $-5y''+y'+y = \cos x + \sin 2x$

Méthode de résolution

Thèoréme 7.2.1 *Soit $(E) : ay''+by'+cy = k(x)$ une équation différentielle du second ordre avec second membre. La solution générale de (E) est $y = y_1 + y_2$ où y_1 est solution de équation différentielle $ay''+by'+cy = 0$ et y_2 une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = k(x)$.*

☞**Exercice d'application 7.2.3**

Soit $(E) : 2y'' - 6y' + 10y = e^{3x}$ et $(E') : 2y'' - 6y' + 10y = 0$.

1. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ solution de (E).

2. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E').

3. Résoudre (E') et (E).

4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative $(\mathcal{C}f)$ passe par le point $A\left(0; \frac{1}{5}\right)$ et dont la tangente en A a pour coéfficient directeur 2.

5. Déterminer une primitive de f.

Inspection d'Académie de Saint-Louis	**Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé	**Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté	

Série n^{o}5 : Calcul d'intégrales & Equations différentielles

☞Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 \frac{1+e^x}{x+e^x}dx$; $\int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

$\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x dx$;

$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$; $\int_1^2 \frac{x^2+3x-1}{x^2}dx$;

$\int_0^1 \frac{3e^x}{3e^x+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1+\tan^2 x)dx$;

$\int_0^1 xe^{x^2}dx$; $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$; $\int_0^{\pi} \cos x \sin^2 x dx$

☞Exercice 2

1. Soit $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$; $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

b) Calculer $\int_2^3 f(x)dx$.

2. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln x$; $g(x) = (x+1)e^{-x}$

☞Exercice 3

1. Montrer que $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$. En déduire $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$.

2. On pose $J = I = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)dx$. En intégrant par parties, calculer J.

☞Exercice 4

Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1 et I_2.

2. En intégrant par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

3. Calculer I_3 et I_4.

☞Exercice 5

On pose $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire I.
3. Vérifier que $J + 2I = K$.
4. A l'aide d'une intégration par parties sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
5. En déduire les valeurs de J et K.

☞Exercice 6

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;0;1\}$, on a :
$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.
2. Calculer $\int_2^4 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$.
3. A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_2^4 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$.

☞Exercice 7

1. Résoudre équations différentielles suivantes :

a) $3y' + 5y = 0$; b) $y'' + 5y' + 6y = 0$;
c) $2y'' - 4y' + 2y = 0$; d) $y'' + \omega^2 y = 0$

2. a) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 5 = 0$.

b) Déterminer la solution f de (E) vérifiant

$f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$

☞Exercice 8

On considère l'équation différentielle

$(E) : y'' + 2y' + y = -2e^{-x}$

1. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = -x^2e^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. En déduire la solution générale de (E).

☞Exercice 9

Soit l'équation différentielle :

$(E) : y'' - 2y' + 2y = 2 - 4x + 2x^2$.

1. Trouver g une fonction polynôme du second degré solution de (E).
2. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 2y' + 2y = 0$.
3. En déduire les solutions de (E).
4. Trouver la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. Déterminer une primitive de f

a) En utilisant une intégration par parties

b) En utilisant l'équation différentielle.

☞**Exercice 10**

1. Soit $(E_0) : y' + 2y = e^{-x} \cos x$.

a) Déterminer les réels α et β pour que la fonction $\phi : x \longmapsto (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$ soit solution

de (E_0).

b) Déterminer la solution g de (E_0) vérifiant $g(0) = 1$.

2. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = (x + 1)e^{-x}$.

a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $h : x \longmapsto (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E).

b) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de

l'équation différentielle $(E') : y'' - 3y' + 2y = 0$.

c) Réoudre (E'). En déduire les solutions de (E).

d) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$

☞**Exercice 11**

On considère l'équation différentielle

$(E) : y'' + 2y' + 3y = (x^2 + 1)e^{-x}$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g définie par $g(x) = (ax^2 + bx + x)e^{-x}$ soit solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y'' + 2y' + 3y = 0$.
3. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe admet à l'origine une tangente de coefficient directeur -1.

☞**Exercice 12**

Soit $(E) : y'' - 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g : x \longmapsto (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$ soit solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + 2y = 0$.
3. Résoudre (E'). En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe passe par O et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

☞**Exercice 13**

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle $9y'' + 6y' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 6$ et $y'(0) = 0$.
2. Etudier les variations puis dresser le tableau de variation de la fonction f définie par :

$f(x) = 2(x + 3)e^{-\frac{x}{3}}$.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 0]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que g^{-1}, la bijection réciproque de g est dérivable en 0 puis calculer

$(g^{-1})'(0)$.

4. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C}f)$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
5. Soit λ un réel quelconque. Déterminer l'aire $S(\lambda)$ du domaine compris entre $(\mathcal{C}f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S(\lambda)$. Interpréter géométriqement le résultat.

☞**Exercice 14**

1. Soit l'équaion différentielle :

$(E) : -\dfrac{1}{2}y'' + \dfrac{3}{2}y' - y = 0$.

a) Résoudre (E).

b) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ passe par le point

$A(0;-1)$ et admet en ce point, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{2x} - e^{x}$. Soit $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité 2cm).

a) Etudier les variations de f.

b) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}f)$ au point d'abscisse $\ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

d) Construire $(\mathcal{C}f)$.

e) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2, du domaine délimité par $(\mathcal{C}f)$, les droites d'équation

$x = \alpha$ $(\alpha < 0)$, $x = \ln 2$ et l'axe des abscisses.

f) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat.

☞**Exercice 15**

1. On considère l'équation différentielle

$(E) : y'' + 2\sqrt{2}y' + 6y = 0.$

a) Résoudre (E).

b) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\sqrt{2}x + 1$.

2. On pose $F(x) = -\dfrac{1}{6}\left[f'(x) + 2\sqrt{2}f(x)\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que F est une primitive de f sur

$\mathbb{R}$.

b) En déduire le calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

« L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit»

Aristote

Deuxième partie

ORGANISATION DE DONNÉES

CHAPITRE 8 Statistique à deux variables

Introduction

Sur une population d'individus, il est toujours possible d'étudier simultanément deux variables X et Y.
Pour chaque individu i, $(1 \leq i \leq n)$, on a un couple de données $(x_i; y_i)$. Ces données sont mesurées au même moment ou à des instants différents.
L'ensemble des couples $\{(x_1; y_1); (x_2; y_2); \ldots; (x_n; y_n)\}$, est appelé une série double notée (X, Y).
L'étude d'une série statistique a pour objet :

- La détermination d'une liaison éventuelle entre les deux variables .
- La description de cette liaison si elle existe.

8.1 Vocabulaire

Définition 8.1.1
• ***Population*** *: On appelle population l'ensemble sur le quel on collecte les données. La population n'est pas forcément composée de personnes (personnes, objets, pays,...).*
• ***Individu ou unité statistique*** *: On appelle individu tout élément de la population.*
• ***Echantillon*** *: On appelle échantillon, toute partie non vide d'une population.*
• ***Caractère*** *: toute propriété que peut avoir un individu . On distingue les caractères qualitatifs (qui ne peuvent pas s'exprimer par un nombre) et les caractères quantitatifs (mesurés par un nombre) .*

8.2 Série statistique double

On parle de série statistique à deux variables quand on étudie simultanément deux caractères dans une même population.

☞ **Exemple 8.2.1** *En $TS2$ (population), on peut étudier les poids et les tailles (caractère) des élèves (Individu).*

Dans toute cette section, on travaillera avec le tableau 1 ci-dessous.

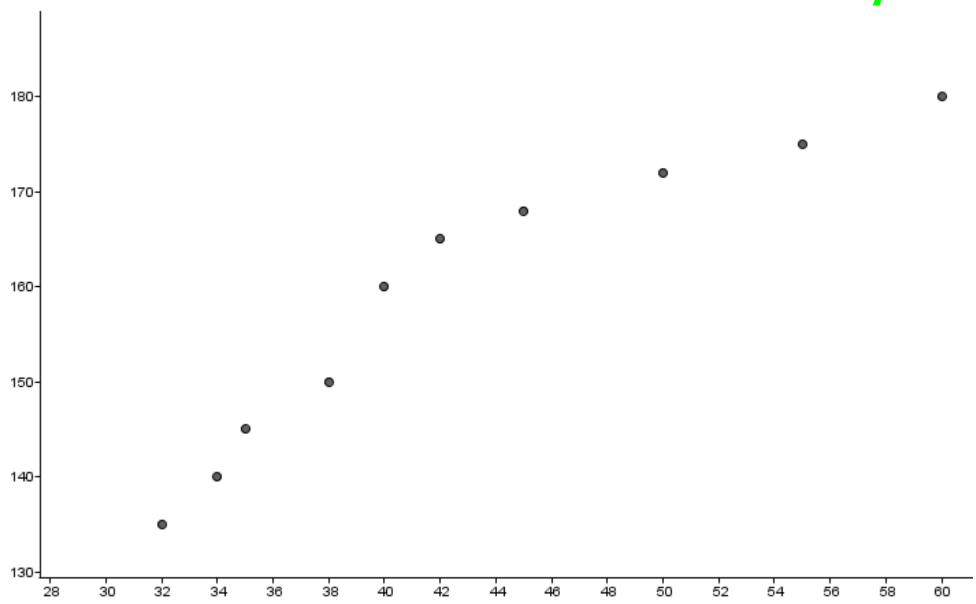
☞ **Exemple 8.2.2** *Sur 10 élèves de la $TS2$, on étudie le poids (X) en kg et la taille (Y) en cm. Les résultats sont consignés dans le* ***tableau 1*** *ci-dessous :*

x_i *en kg*	*32*	*34*	*35*	*38*	*40*	*42*	*45*	*50*	*55*	*60*
y_i *en cm*	*135*	*140*	*145*	*150*	*160*	*165*	*168*	*172*	*175*	*180*

8.2.1 Nuage des points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle nuage des points, l'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$.

☞ **Exemple 8.2.3**
1. Représenter le nuage des points du tableau 1.
2. Que remarquez vous sur la forme du nuage ?
☞***Résoluton***
1. Représentons le nuage des points du tableau 1.



2. On remarque que le nuage a une forme allongée (forme de droite)

8.2.2 Moyenne

- Le nombre d'individu d'une population est appelé l'effectif total. On le note N.
- La moyenne de X, notée $\bar{X}$ est dé finie par : $\boxed{\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$.
- La moyenne de Y, notée $\bar{Y}$ est dé finie par : $\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i}$.
- On appelle point moyen, le point G de coordonnées $\bar{X}$ et $\bar{Y}$.

☞ **Exemple 8.2.4** *Pour le tableau 1, on a :*
$N = 10$
- $\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{32+34+35+38+40+42+45+55+60}{10} = 43,1$

Alors $\boxed{\bar{X} = 43,1}$.

• $\bar{Y} = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = \dfrac{135+140+145+150+160+165+168+172+175+180}{10} =$ 159. *alors* $\boxed{\bar{Y} = 159}$.

• *Le point moyen est* $G(43,1;159)$

8.2.3 Variance et écart-type

• On appelle variance de X le réel positif noté $V(X)$ et défini par : $\boxed{V(X) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{X}^2}$.

• L'écart type de X est le réel positif noté $\sigma(X)$ et défini par : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

• On appelle variance de Y le réel positif noté $V(Y)$ et défini par : $\boxed{V(Y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{Y}^2}$.

• L'écart type de Y est le réel positif noté $\sigma(Y)$ et défini par : $\boxed{\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}}$.

☞ **Exemple 8.2.5** *Calculer $V(X)$, $V(Y)$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ du tableau 1.*
On a :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{X}^2 \\ &= \frac{32^2+34^2+35^2+38^2+40^2+42^2+45^2+55^2+60^2}{10} - (43,1)^2 \\ &= 78,69 \end{aligned}$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{78,69} = 8,87$. *Alors* $\boxed{V(X) = 78,69}$ *et* $\boxed{\sigma(Y) = 8,87}$.

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \bar{Y}^2 \\ &= \frac{135^2+140^2+145^2+150^2+160^2+165^2+168^2+172^2+175^2+180^2}{10} - 159^2 \\ &= 219,81 \end{aligned}$$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{219,8} = 14,82$. *Alors* $\boxed{V(Y) = 219,8}$ *et* $\boxed{\sigma(Y) = 14,82}$.

8.2.4 Covariance

On appelle covariance du couple (X,Y) le réel noté $Cov(X,Y)$ et défini par :
$\boxed{Cov(X,Y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{X}\bar{Y}}$.

☞ **Exemple 8.2.6** *Calculer la covariance de X et Y du tableau 1.* $\boxed{Cov(X,Y) = 6338,01}$

8.3 Ajustement linéaire

Lorsque le nuage de points a une forme allongée(c'est-à dire lorsque les points semblent situer autour d'une droite) alors on dit qu'on peut effectuer un ajustement linéaire du nuage de points.
Auster le nuage de points, c'est tracer une droite qui passe "le plus près possible " de tous les points. Une telle droite est appelée **droite d'ajustement** ou **droite de régression**.

8.3.1 Détermination de la droite de régression

Il existe plusieurs méthodes de détermination de la droite de régression.

Méthode des moindres carrées

♣ **Droite de régression de Y en X.**

La droite de régression de Y en X est la droite notée $D_{Y/X}$ et définie par :

$$D_{Y/X} : y = ax + b \text{ avec } \begin{cases} a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} \\ b = \bar{Y} - a\bar{X} \end{cases}$$

♣ **Droite de régression de X en Y.**

La droite de régression de X en Y est la droite notée $D_{X/Y}$ et définie par :

$$D_{X/Y} : x = a'y + b' \text{ avec } \begin{cases} a' = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(Y)} \\ b' = \bar{X} - a'\bar{Y} \end{cases}$$

☞ **Exemple 8.3.1** *dans le tableau 1 :*
1. Déterminer la droite de régresssion de Y en X.
2. Déterminer la droite de régresssion de X en Y.
3. Estimer la taille d'un élève qui pèse $70kg$.
4. Estimer le poids d'un élève qui mesure $170cm$.

Remarque 8.3.1 *Le point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ appartient à ces deux droites de régression.*

Méthode de Mayer

Principe :
• On partage le nuage de points en deux sous nuages de points.
• On cherche les points G_1 et G_2 les points moyens des sous nuages .
• Enfin, On trace la droite passant par G_1 et G_2.
Cette droite esr appelée la **droite de Mayer**.

☞ **Exemple 8.3.2** *Déterminer la droite de Mayer du tableau 1.*

8.4 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 8.4.1
On appelle coefficient de corrélation de la série $(X;Y)$ le réel noté r et défini par :

$$\boxed{r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$$

Propriété 8.4.1
• *Le coefficient de corrélation est toujours compris entre -1 et 1.* $r \in [-1;1]$
• $r^2 = aa'$

$$\begin{aligned} aa' &= \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \times \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} \\ &= \frac{[Cov(X,Y)]^2}{V(X)V(Y)} \\ &= \frac{[Cov(X,Y)]^2}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)} \\ &= \frac{[Cov(X,Y)]^2}{[\sigma(X)\sigma(Y)]^2} \\ &= \left(\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

☞ **Exemple 8.4.1** *Pour le tableau 1, on a* $r = 0,94$

8.4.1 Interprétation suivant les valeurs de r

• Si $r = 0$ alors il y a aucune corrélation entre X et Y. (X et Y sont indépendantes).
• Si $|r| = 1$ alors il y a une parfaite corrélation entre X et Y.
• Si $|r| < 0,87$ alors il y a une faible corrélation entre X et Y.
• Si $|r| \geq 0,87$ alors il y a une forte corrélation entre X et Y. Dans ce cas un ajustement linéaire est justifié.

☞ **Exemple 8.4.2** *Pour le tableau 1, on a :*
$r = 0,94$ *donc* $|r| = 0,94 \geq 0,87$ *donc un ajustement linéaire est justifié.*

☞**Exercice d'application 8.4.1** *On s'est intéressé au nombre de personnes qui ont visité un site touristique sur 7 ans. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous où Y représente le **nombre de personnes** en milliers qui ont visité un site pour l'année de rang X.*

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	1,5	2	3,5	1	6	8	10

On donnera les résultats à 10^{-2} près par excès.
1. Représenter le nuage des points de la série ainsi définie.
2. Calculer la covariance de la série (X,Y).

3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
4. Justifier qu'une équation de la droite de régression de Y en X est : $y = 1,43x - 1,15$.
5. En déduire une estimation du nombre de personnes qui visiteront ce site en l'année de rang 31.

☞**Exercice d'application 8.4.2** *Soient a et b deux réels. On considère la série double $(X;Y)$ définie par :*

X	9,5	10	10,75	a	12,5	13	13,25	13,5	14	15
Y	12	13	13,5	14	14,5	14,75	b	15,25	15,5	15,75

1. On suppose que les deux droites de régression sont définies par :
$(D_{Y/X}) : y = 0,66x + 6,19$ et $(D_{X/Y}) : x = 1,46y - 8,63$
a) Justifier que $Cov(X;Y) > 0$ et déterminer le coefficient de corrélation linéaire.
b) A-t-on une bonne corrélation ?
*c) Déterminer les valeurs approchées de a et b. (**Indication** : Le point $G(\bar{X};\bar{Y})$ appartient*
aux deux droites).
2. On prend maintenant $a = 12$ et $b = 15$.
a) Représenter le nuage des points.
b) Retrouver les résultats du 1.) centième près.

8.5 Organisation de données groupées : Série non injective

Dans toute cette partie, on travaillera avec le tableau 2 ci-dessous.

☞ **Exemple 8.5.1** *On a relev ? les notes de Maths et de Physique de 160 candidats ? un examen. Les caract ?res ?tudi ?s sont donc la note de Maths X et la note de Physique Y. Les valeurs des caract ?res X et Y sont donn ?es par le tableau ? double entr ?e suivant, appel ? tableau de distribution ou de corr ?lation ou de contingence.*

X/Y	7	10	11	12	14	15	$n_{i\bullet}$
7	5	7	2	0	3	5	$n_{21} = 22$
8	1	4	0	6	2	3	$n_{22} = 16$
9	8	9	10	13	5	4	$n_{23} = 49$
10	0	3	7	12	10	11	$n_{24} = 43$
11	1	1	3	2	0	4	$n_{25} = 11$
13	2	6	2	3	5	1	$n_{26} = 19$
$n_{\bullet j}$	$n_{11} = 17$	$n_{12} = 30$	$n_{13} = 24$	$n_{14} = 36$	$n_{15} = 25$	$n_{16} = 28$	N=160

8.5.1 Définition et notation

• n_{ij} est appelé l'effectif partiel du couple. c'est le nombre d'individus qui ont la valeur x_i du caract ?re X et la valeur y_j du caract ?re Y.
• La somme de tous les effectifs partiels donne l'effectif total.
• La fr ?quence du couple $(x_i;y_i)$ est $f_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{N}$

☞ **Exemple 8.5.2** *Pour le tableau 2, on a :*

• $n_{11} = 5$ *(Nombre d'él ?ves qui ont 7 en maths et 7 en PC)* ; $n_{43} = 13$; $n_{56} = 5$ *etc.*

• $N = 160$

• $f_{43} = \dfrac{n_{43}}{N} = \dfrac{13}{160}$

8.5.2 Séries marginales

• La somme des effectifs partiels contenus dans la ligne de x_i est appel ?e effectif partiel marginal de x_i, on le note $n_{i\bullet}$.
• La somme des effectifs partiels contenus dans la colonne de y_j est appel ?e effectif partiel marginal de y_j, on le note $n_{\bullet j}$.

S ?rie marginale de X

♣ La série marginale de X est $(x_i, n_{i\bullet})$. Elle est représentée par

x_i	7	8	9	10	11	13
$n_{i\bullet}$	22	16	49	43	11	19

• la fr ?quence marginale de x_i est $\boxed{f_{i\bullet} = \dfrac{n_{i\bullet}}{N}}$

• la moyenne marginale de X est $\boxed{\bar{X} = \dfrac{1}{N}\sum_i x_i n_{i\bullet}}$.

• la variance de X est $\boxed{V(X) = \dfrac{1}{N}\sum_i n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{X}^2}$.

• L'écart type de X est le réel positif noté $\sigma(X)$ et défini par : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

☞ **Exemple 8.5.3** *Déterminer* $f_{2\bullet}$, $\bar{X}$, $V(X)$ *et* $\sigma(X)$.

x_i	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*13*	*Totaux*
$n_{i\bullet}$	*22*	*16*	*49*	*43*	*11*	*19*	*N=160*
$n_{i\bullet}x_i$							$\sum n_{i\bullet}x_i =$
x_i^2							$\sum x_i^2 =$
$n_{i\bullet}x_i^2$							$\sum n_{i\bullet}x_i^2 =$

S ?rie marginale de Y

♣ La série marginale de Y est $(y_i, n_{\bullet j})$. Elle est représentée par

y_j	7	10	11	12	14	15
$n_{\bullet j}$	17	30	24	36	25	28

• la fr ?quence marginale de x_i est $\boxed{f_{\bullet j} = \dfrac{n_{\bullet j}}{N}}$

- la moyenne marginale de Y est $\boxed{\bar{Y} = \dfrac{1}{N}\sum_i y_j n_{\bullet j}}$.
- la variance de Y est $\boxed{V(Y) = \dfrac{1}{N}\sum_i n_{\bullet j} y_i^2 - \bar{Y}^2}$.
- L'écart type de Y est le réel positif noté $\sigma(Y)$ et défini par : $\boxed{\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}}$.

☞ **Exemple 8.5.4** *Déterminer $f_{\bullet 3}$, $\bar{Y}$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.*

y_j	7	10	11	12	14	15	Totaux
$n_{\bullet j}$	17	30	24	36	25	28	N=160
$n_{\bullet j} y_j$							$\sum n_{\bullet j} y_j =$
y_j^2							$\sum y_j^2 =$
$n_{\bullet j} y_j^2$							$\sum n_{\bullet j} y_j^2 =$

Covariance de X et Y

Définition 8.5.1

La covariance de X et Y est définie par $\boxed{Cov(X,Y) = \dfrac{1}{N}\sum n_{ij} x_i y_j - \bar{X}\bar{Y}}$.

Technique pratique de calcul de $Cov(X, Y)$

X/Y	7	10	11	12	14	15	$n_{i\bullet}$	$n_{ij} x_i y_j$
7	5	7	2	0	3	5	$n_{21} = 22$	
8	1	4	0	6	2	3	$n_{22} = 16$	
9	8	9	10	13	5	4	$n_{23} = 49$	
10	0	3	7	12	10	11	$n_{24} = 43$	
11	1	1	3	2	0	4	$n_{25} = 11$	
13	2	6	2	3	5	1	$n_{26} = 19$	
$n_{\bullet j}$	$n_{11} = 17$	$n_{12} = 30$	$n_{13} = 24$	$n_{14} = 36$	$n_{15} = 25$	$n_{16} = 28$	N=160	$\sum n_{ij} x_i y_j =$

Nuage de points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle nuage de points, l'ensemble des points de coordonnées non toutes nulles $M_{ij}(x_i; y_j)$. Au dessus de chaque point M_{ij} du nuage on pr ?cise l'effectif n_{ij}

8.5.3 Série conditionnelle

Définition 8.5.2 *Si $X : x_1, x_2, \ldots, x_p$ et $Y : y_1, y_2, \ldots, y_q$.*
- *la s ?rie conditionnelle X sachant que $Y = y_k$ not ?e $X/Y = y_k$ est obtenue en prenant tous les couples (x_i, y_k) o ? i varie de 1 ? p et k fixe.*
- *la s ?rie conditionnelle X sachant que $X = x_k$ not ?e $Y/X = x_k$ est obtenue en prenant tous les couples (y_j, x_k) o ? j varie de 1 ? q et k fixe*

☞ **Exemple 8.5.5**
1. Déterminer la série conditionnelle de X sachant que $Y = 10$.
2. Déterminer la série conditionnelle de Y sachant que $X = 7$.

Fréquence conditionnelle

• On appelle fréquence conditionnelle de x_i sachant $Y = y_j$ le réel défini par :
$\boxed{f_{x_i/Y=y_j} = \dfrac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}}$.
• On appelle fréquence conditionnelle de y_j sachant $X = x_i$ le réel défini par :
$\boxed{f_{y_j/X=x_i} = \dfrac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}}$

☞ **Exemple 8.5.6** *Déterminer la fréquence conditionnelle de 10 sachant que $Y = 11$.*

☞**Exercice d'application 8.5.1** *Dans une maternité, on a relevé pour chacune des 20 naissances d'une journée, l'âge X de la mère (en années) et le poids Y du nouveau-né (en kilogrammes). Les résultats sont regroupés dans le tableau à double entrée ci-dessous :*

$X \setminus Y$	16	18	20	22	26	Totaux
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Totaux	1	5	4	6	4	20

NB : Donner les formules avant d'effectuer les calculs puis les réponses à 10^{-2} près par défaut.
1. Déterminer les séries marginales associées au caractère X et Y.
2. Déterminer les moyennes respectives de ces séries marginales.
3. Déterminer le coefficient de corrélation de X et Y. La corrélation est-elle bonne ?

Inspection d'Académie de Saint-Louis — **Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé — **Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté

Série n° 5 : Statistique à deux variables

☞**Exercice 1**
Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiare d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires). On note X la quantité, en tonnes de matières premières ; Y le chiffre d'affaires en milliers de francs. Dans tout l'exercice on pourra donner directement les résultats fournis par la calculatrice. Le relevé des mois précédents est le suivant :

Numéros du mois	1	2	3	4	5	6
X	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
Y	37	40	33	33	41	35
Z	3,9	3,7	3,2	3,3	3,6	3,7

1. a) Calculer les coefficients de corrélation linéaire r_1 entre X et Y et r_2 entre X et Z .
b) Est-ce un ajustement entre Y et X ou entre Z et X qui permettra la meilleure estimation
de X ?
2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et en déduire une estimation du besoin en matières premières pour $Y = 39$.

☞**Exercice 2**
Le tableau suivant donne la part des exportations dans le PIB marchand (en %) d'un pays pendant sept années. X représente l'**année** et Y le pourcentage du PIB correspondant.

X	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Y	18	20	22	26,3	25,2	24.5	27,5

On donnera les résultats à deux chiffres après la virgule sans arrondir.
1. Représenter le nuage des points de la série ainsi définie.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen de ce nuage.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Un ajustement linéaire de ce nuage est-il justifié
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) de régression de Y en X.
5. En déduire une prévision du PIB marchand pour l'année 2017.

☞**Exercice 3** Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes
1.(X, Y) est une série double. Soit $(D_1) : y - 7x - 19 = 0$ la droite de régression de Y en X et $(D_2) : x - 0,14y + 4,84 = 0$ la droite de régression de X en Y. $V(Y) = 100$ est la variance de Y.
a) Calculer $Cov(X, Y)$ et $V(X)$.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

c) Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes de X et de Y.

2. Un laboratoire étudie la croissance d'une souche de bactéries Acétobacter ; il obtient les résultats suivants :

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombre n_i de bactéries par unité de volume (en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590

Les points de coordonnées $(x_i; n_i)$ ne sont pas alignés, le laboratoire décide alors de poser $y_i = \ln n_i$.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous puis donner les valeurs arrondies au centième prés :

x_i	4	5	6	7	8	9
y_i	2,61			4,80		

b) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.

c) Déterminer les coordonnées du point moyen G. Placer le point G.

d) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Interpréter le résultat.

e) Donner une équation de la droite de régression de X en Y.

f) Déterminer le temps nécessaire à l'obtention de 1.000.000 de bactéries par unité de volume.

☞**Exercice 4**

On a relevé le poids Y (en kg) et la taille X (en cm) des élèves d'une classe de terminale S. On obtient la série double $(X; Y)$ dont les valeurs sont regroupées dans le tableau suivant :

X/Y	54	58	60	63	66	67
165	1	0	3	2	0	2
168	0	1	0	0	1	0
171	1	3	1	3	0	1
173	2	5	0	0	0	0
175	0	0	0	1	1	0
178	0	0	1	0	0	4

1. a) Déterminer les effectifs marginaux et l'effectif total.

b) Déterminer les moyennes et variances des séries marginales.

2. Soit Z la série conditionnelle définie par $z_j = \overline{X/Y_j}$.

a) Déterminer les valeurs de Z à 10^{-2} près.

b) Construire le nuage des points associé à la série $(Y; Z)$.

c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre Y et Z. Un ajustement linéaire est-il
justifié ?

d) Déterminer une équation de régression de Y en Z.

☞**Exercice 5**

Après un test le secrétaire du jury a relevé les notes de maths (X) et de dessin (Y) obtenues par les candidats. Mais en relevant les notes dans le tableau ci-dessous il a oublié certaines données.

X/Y	3	3	10	11	12
4	x	1	1	1	0
6	2	y	2	0	2
9	3	1	1	1	0

1. a) Déterminer les séries marginales en fonction de x et y.
   b) En déduire x et y sachant que $\bar{X} = 7,35$ et $\bar{Y} = 6,4$.
2. On prend ici $x = 2$ et $y = 3$. On désigne par Z la série conditionnelle définie par $z_i = \dfrac{1}{n_{ji}} \sum_{j=1}^{6} n_{ji} y_j$ notée $\overline{Y/X_i}$.
   a) Déterminer la série $(X; Z)$.
   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z.
   c) A-t-on une bonne corrélation entre X et Z ?

☞**Exercice 6**

Les réultats seront donnés au centième près.

On considère la série double définie par le tableau suivant :

X \ Y	20	25	35	40
5	1	1	2	1
10	2	0	1	1
20	0	2	1	0
25	1	1	3	1
30	1	0	0	1

Déterminer les séries marginales, les moyennes, les variances de X et Y ; et le coefficient de cor

CHAPITRE 9 Dénombrement

9.1 Ensemble

Définition 9.1.1 *Un ensemble est une collection d'objets définis sans ambiguité.*
Soit E un ensemble et x un élément.

- x *est élément de* $E \Leftrightarrow x \in E$
- x *n'est pas élément de* $E \Leftrightarrow x \notin E$.

Un ensemble sans élément est appelé ensemble vide. On note Φ

☞ **Exemple 9.1.1** *Soit* $E = \{1; 2; 3; a; b; c\}$. *On a* $2 \in E$ *et* $d \notin E$

9.1.1 Sous ensembles

Soit E un ensemble. On appelle sous ensemble de E toute partie A de E. On note $A \subset E$.
$A \subset E \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in E$

☞ **Exemple 9.1.2** *Soit* $E = \{1; 2; 3; a; b; c\}$ *et* $A = \{1; 2; 3\}$ *On a* $A \subset E$.

9.1.2 Ensembles finis

Un ensemble fini est un ensemble dont on peut compter le nombre d'élements.
Le nombre d'ément d'un ensemble fini E est appelé le cardinal de E. On note $Card(E)$.

☞ **Exemple 9.1.3**

$A = \{1; 2; 3; a; b; c\} \Rightarrow Card(A) = 6$
$B = \{x; y; z\} \Rightarrow Card(B) = 3$
$C = \{\Phi\} \Rightarrow Card(C) = 1$
$D = \{\} = \Phi \Rightarrow Card(D) = 0$

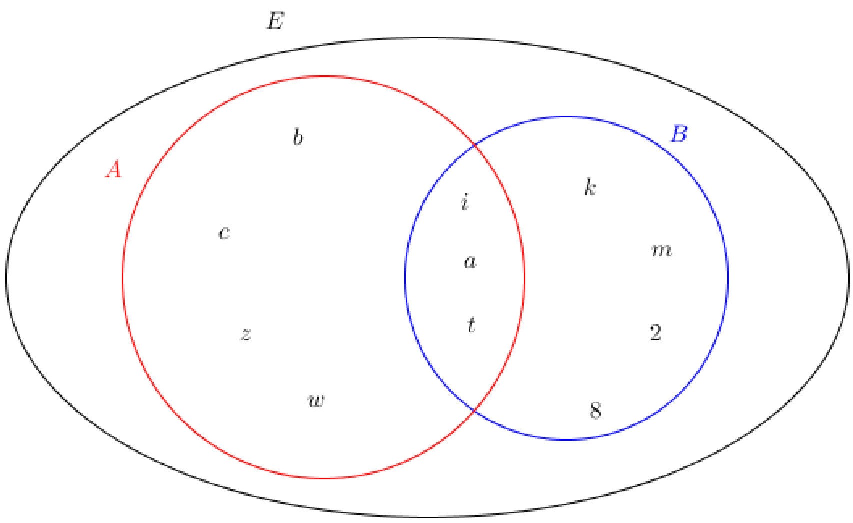
9.1.3 Réunion, Intersection, Produit cartésien

Définition 9.1.2 *Soient A et B deux ensembles finis. On appelle :*
• ***réunion*** *de A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A* **ou** *dans B. On note* $A \cup B$.
NB *: $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui sont au moins dans l'un des ensembles A et B.*
• ***intersection*** *de A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A* **et** *dans B. On*

note $A \cap B$.
• ***produit cartésien*** *de* A *et* B *l'ensemble des couples* (a, b) *tels que* $a \in A$ *et* $b \in B$. *On note* $A \times B$.
NB *:* $A \times B \neq B \times A$ *(un élement de* A *suivi d'un élement de* B *est différent de : un élement de* B *suivi d'un élement de* A

☞ **Exemple 9.1.4** *Soit* $A = \{a; b; c; i; z; t; w\}$ *et* $B = \{k; m; i; 2; a; 8; t\}$. *On a :*
$A \cup B = \{a; b; c; i; z; t; w; k; m; 2; 8\}$ *et* $A \cap B = \{a; i; t\}$

Illustration



☞ **Exemple 9.1.5** *Soit* $A = \{a; b\}$ *et* $B = \{1; 2\}$. *On a :*
$A \times B = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2)\}$ *et* $B \times A = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b)\}$

9.1.4 Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \Phi$

9.1.5 Complémentaire de A dans E

Soit E un ensemble fini et A un sous ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$ ou $C_E A$.

$x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A$

☞ **Exemple 9.1.6** *Soit* $E = \{a; b; c; 1; 2; 3\}$ *et* $A = \{a; b; c\}$. *On a :* $\overline{A} = \{1; 2; 3\}$

Propriété 9.1.1 • $A \cup \overline{A} = E$ *;* • $A \cap \overline{A} = \Phi$

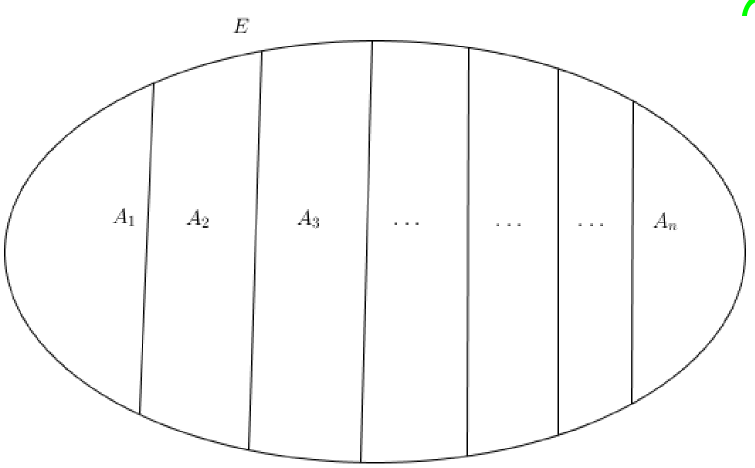
Propriété 9.1.2 *Soient* A, B *et* C *trois ensembles finis.*
- $A \cup B = B \cup A$ *;* • $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup A = A$ *;* • $A \cap A = A$
- $A \cup \Phi = A$ *;* • $A \cap \Phi = \Phi$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *;* • $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$ *;* • $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *;* • $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

9.1.6 Partition

Définition 9.1.3 *Soit E un ensemble fini non vide. Soient A_1, A_2,..., A_n des sous ensembles non vides se E. On dit que $\{A_2, A_2, \ldots, A_n\}$ forme une partition de E si et seulement si les sous ensembles A_i $(\leq i \leq n)$ sont disjoints deux à deux et leur réunion donne E.*

$$\{A_2, A_2, \ldots, A_n\} \text{ est une partition de } E \Leftrightarrow \begin{cases} A_i \cap A_j = \Phi \quad si \quad i \neq j \\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E \end{cases}$$

Illustration



NB : On a : $\begin{cases} A \cap \overline{A} = \Phi \\ A \cup \overline{A} = E \end{cases}$ donc $\{A, \overline{A}\}$ forme une partition de E.

☞ **Exemple 9.1.7** *Soit* $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. $A = \{1; 3; 5\}$ *et* $B = \{2; 4; 6\}$.

9.1.7 Cardinaux

Thèoréme 9.1.1 *Soient A et B deux sous ensembles finis d'un ensemble fini E.*

- *Si $A \cap B = \Phi$ alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$*
- $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
- $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$
- $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$
- *Si $A \subset B$ alors $Card(A) \leq Card(B)$*

☞ **Exemple 9.1.8** *Mamadou dispose de 4 pantalons et 3 chemises. Combien de façons peut-il s'habiller avec ses 4 pantalons et ses 3 chemises ?*

☞ **Exemple 9.1.9** *Dans une classe de 40 élèves , 32 pratiquent le tennis et 25 le football. Sachant que 5 élèves de la classe ne pratiquent aucune de ces deux disciplines.*
1. Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent au moins l'une des deux disciplines.
2. Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent les deux à la fois.

☞**Exercice d'application 9.1.1** *Dans une école de sportif où chaque élève joue au football ou au basketball, on a demandé 25 footballeurs et 13 basketteurs. Sachant que l'école compte 32 élèves, déterminer :*

1. Le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois les deux disciplines.
2. Le nombre d'élèves qui font uniquement le football.
3. Le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket .
4. Le nombre d'élèves qui ne pratiquent aucune de ces disciplines.

9.2 Outils de dénombrement

Factoriel d'un entier

Soit n un entier naturel non nul. On appelle factoriel n, le produit des n premiers entiers naturels non nuls. On note $n!$. $n!$ se lit "factoriel n".

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1$. On a aussi $n! = n(n-1)!$ et $n+1)! = (n+1)n!$
.

Par convention $0! = 1$

☞ **Exemple 9.2.1** $1! = 1$; $2! = 2 \times 1 = 2$; $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$; $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Anagramme : "AMIS" est un anagramme du mot "MAIS"

• Le nombre d'anagramme du mot "NON" est : $\dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$

• Le nombre d'anagramme du mot "BAC" est : $\dfrac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = \dfrac{6}{1} = 6.$

• Le nombre d'anagramme du mot "BOUBOU" est : $\dfrac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = \dfrac{720}{8} = 72$

9.2.1 P-listes

Définition 9.2.1 *Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel non nul. On appelle **P-listes** ou **P-uplets** d'éléments de E, toute suite **ordonnée** de p éléments de E distincts ou non.*

☞ **Exemple 9.2.2** *Soit $E = \{1; 2; 3; a; b; c\}$.*
- *Exemple de 2-listes :* $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, a)$, $(2, 2)$, (a, a),...
- *Exemple de 3-listes :* $(1, 2, 1)$, $(b, 3, a)$, (b, b, b), $(a, a, 1)$,...

Remarque 9.2.1
• *Les P-listes sont caractérisées par l'ordre et la possibilité de répétition.*
• *Lorsqu'on est en présence d'un tirage successif avec remise de p éléments de E, on des P-listes.*

Nombre de P-listes d'élément de E

Thèoréme 9.2.1 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p, c'est le nombre de façon de tirer successivement avec remise p éléments de E.*

☞ **Exemple 9.2.3**
1. Déterminer le nombre de numéros de téléphone de 7 chiffres qu'on peut fabriquer.
2. Déterminer le nombre de numéros de téléphone du réseau tigo qu'on peut fabriquer.

3. Déterminer le nombre de numéros de téléphone du réseau orange qu'on peut fabriquer.
4. Déterminer le nombre de mots de 4 lettres ayant un sens ou non qu'on peut créer.

Remarque 9.2.2
• *Si dans un exercice avec les p-listes, les positions ne sont pas présicées alors il faut touours multiplier le résultat obtenu par le nombre d'anagrammes.*
• *"Au moins signifie $\geq$ " et "Au plus signifie $\leq$ "*

☞ **Exemple 9.2.4**
Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 ; 3 boules vertes de 1 à 3 et 2 boules jaunes de 1 à 2. On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages différents :
- *a) possibles :* 10^3
- *b) contenant 3 blanches.* 5^3
- *c) contenant 3 boules de même couleur :* $5^3 + 3^3 + 2^3$
- *d) contenant 2 boules blanches suivies d' une boule verte :* $5^2 \times 3^1$.
- *e) contenant 2 boules blanches et 1 boule verte :* $3(5^2 \times 3^1)$.
- *f) contenant 1 boules blanche, 1 boule verte et 1 boule noire dans cet ordre :* $5^1 + 3^1 + 2^1$.
- *g) contenant 3 boules de couleurs différentes :* $3!(5^1 \times 3^1 \times 2^1)$
- *h) contenant 3 boules de même numéro.* $3^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3$
- *i) contenant au moins une boule blanche.*
- *j) contenant au plus une boule blanche.*

☞**Exercice d'application 9.2.1**
Une urne contient 5 boules blanches blanches ; 3 boules noires et 2 boules rouges . On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne.
1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages contenant :
- *a) 3 boules blanches*
- *b) des boules de même couleur.*
- *c) Au plus 2 boules blanches.*
- *d) Au plus une boule blanche.*
- *e) une boule blanche suivi de 2 boules noires.*
- *f) une boule blanche et 2 boules noires.*
- *g) contenant 2 boules noires :*
- *h) contenant 1 boules blanche, 1 boule rouge et 1 boule noire dans cet ordre :*
- *i) contenant trois boules de même couleur :*

9.2.2 P-arrangement

Définition 9.2.2 *Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle **P-arrangement** d'élements de E, toute suite **ordonnée** de p éléments de E deux à deux distincts .*

☞ **Exemple 9.2.5** *Soit* $E = \{1; 2; 3; a; b; c\}$.
- *Exemple de 2-arrangement :* $(1, 2)$, $(2, 1)$ $(3, a)$, (a, b), (a, c),...
- *Exemple de 3-arrangement :* $(1, 2, 3)$, $(3, 1, 2)$, (b, a, c), $(a, 1, 2)$,...

Remarque 9.2.3
• *Les P-arrangements sont caractérisées par l'ordre et pas la possibilité de répétition.*
• *Lorsqu'on est en présence d'un tirage successif sans remise de p éléments de E, on des P-arrangement.*
• *Lorsqu'on on forme un bureau de p membres parmi n personnes avec de fonctions différentes , on a des P-arrangements (pas de cumul de fonctions) .*

Nombre de P-arrangement d'élément de E

Thèoréme 9.2.2 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier $1 \leq p \leq n$. Le nombre de P-arrangement d'éléments de E est égal à*
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$. *C'est le nombre de façon de tirer successivement sans remise p éléments de E.*

Calcul avec les A_n^p

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$
$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Propriété 9.2.1 $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$

Avec la calculatrice : $A_{10}^3 = 10P3 = 720$; $A_7^4 = 7P4 = 840$;

Remarque 9.2.4
• *Si dans un exercice avec les p-arrangements, les positions ne sont pas présicées alors il faut toujours multiplier le résultat obtenu par le nombre d'anagrammes.*

☞ **Exemple 9.2.6**
Déterminer le nombre de tiercés possible dans l'ordre qu'on peut avoir dans une course de 15 chevaux. On suppose qu'il a pas ex-aequo. $A_{15}^3 = 2730$

☞ **Exemple 9.2.7** *Dans une classe de 30 élèves dont 18 filles et 12 garçons , on forme un bureau de 3 membres avec les fonctions de président, secrétaire et trésorier. Parmi les 30 élève, figurent Binetou et Abou. Le cumul de fonction n'est pas autorisé.*
Déterminer le nombre de bureaux différents :

a. *possibles :* $A_{30}^3 = 24360$
b. *contenant 3 membres de même sexe :* $A_{18}^3 + A_{12}^3 = 6216$
c. *contenant exactement 2 filles :* $3(A_{18}^2 \times A_{12}^1) = 11016$
d. *contenant au moins une fille :* $3(A_{18}^1 \times A_{12}^2) + 3(A_{18}^2 \times A_{12}^1) + (A_{18}^3 \times A_{12}^0) = 23040$
e. *ayant une présidente.* $A_{18}^1 \times A_{29}^2 = 14616$.
f. *dont Binetou est présidente.* $A_1^1 \times A_{29}^2 = 14616 = 812$.
g. *dont Binetou figure parmi les trois élus.* $3(A_1^1 \times A_{29}^2) = 2436$.
h. *dont Binetou est présidente et Abou secrétaire.* $A_1^1 \times A_1^1 \times A_{28}^2 = 756$.
i. *dont Binetou et Abou sont membres du bureau.* $3!(A_1^1 \times A_1^1 \times A_{28}^2) = 4536$.

☞**Exercice d'application 9.2.2** *Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules vertes et 2 boules jaunes. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.*
Déterminer le nombre de tirages différents :

a. possible : $A^3_{10} = 720$
b. contenant 3 boules de couleurs différentes : $3!(A^1_5 \times A^1_3 \times A^1_2) = 180$
c. contenant 3 boules de même couleur : $A^3_5 + A^3_3 = 66$
d. contenant exactement 2 boules vertes : $3(A^2_3 \times A^1_7) = 126$
e. contenant au plus 1 boule verte : $A^0_3 \times A^3_7 + 3(A^1_3 \times A^2_7) = 588$
f. contenant exactement 2 boules non vertes. $3(A^2_7 \times A^1_3) = 378$

9.2.3 Permutation

Définition 9.2.3 *Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **Permutation** d'élements de E, tout **n-arrangement** éléments de E.*

☞ **Exemple 9.2.8** *Soit* $E = \{1; 2; 3\}$.
Exemple de permutation : $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ $(2, 1, 3)$,...

Conséquence 9.2.1 *Le nombre de permutation d'éléments de E est égal à* $A^n_n = n!$

Anagramme : "AMIS" est un anagramme du mot "MAIS"

• Le nombre d'anagramme du mot "NON" est : $\dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$

• Le nombre d'anagramme du mot "BAC" est : $\dfrac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = \dfrac{6}{1} = 6.$

• Le nombre d'anagramme du mot "BOUBOU" est : $\dfrac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = \dfrac{720}{8} = 72$

9.2.4 P-combinaison

Définition 9.2.4 *Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle **P-combinaison** d'élements de E, toute suite distincts de p éléments de E .*

☞ **Exemple 9.2.9** *Soit* $E = \{1; 2; 3; a; b; c\}$.

- *Exemple de 2-combinaison :* $(1, 2)$, $(3, a)$, (a, b), (a, c),...
- *Exemple de 3-combinaison :* $(1, 2, 3)$, (b, a, c), $(a, 1, 2)$,...

Remarque 9.2.5
• *Les P-combinaison sont caractérisées par : Pas d'ordre et pas de répétition.* "$(1, 2) = (2, 1)$"
• *Lorsqu'on est en présence d'un tirage simultané de p éléments de E, on des P-combinaison.*

Nombre de P-combinaison d'élément de E

Thèoréme 9.2.3 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier $1 \leq p \leq n$. Le nombre de P-combinaison d'éléments de E est égal à* $C^p_n = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.
C'est le nombre de façon de tirer simultanément p éléments de E.

$$C^p_n = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A^p_n}{p!}$$

Calcul avec les C_n^p

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!}$$

Propriété 9.2.2 • $C_n^0 = C_n^n = 1$; • $C_n^1 = n$; • $C_n^p = C_n^{n-p}$; • $C_n^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Avec la calculatrice : $A_{10}^3 = 10C3$; $C_7^4 = 7C4$.

Formule du Binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^n b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

☞Exercice d'application 9.2.3

Déterminer le nombre de tiercé différents qu'on peut avoir dans une course de 15 chevaux. C_{15}^3

☞Exercice d'application 9.2.4 *Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5, 3 boules vertes de 1 à 3 et 2 boules jaunes de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de l'urne.*

Déterminer le nombre de tirages différents :

a. possible : C_{10}^3

b. contenant 3 boules de couleurs différentes : $C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1$

c. contenant 3 boules de même couleur : $C_5^3 + C_3^3$

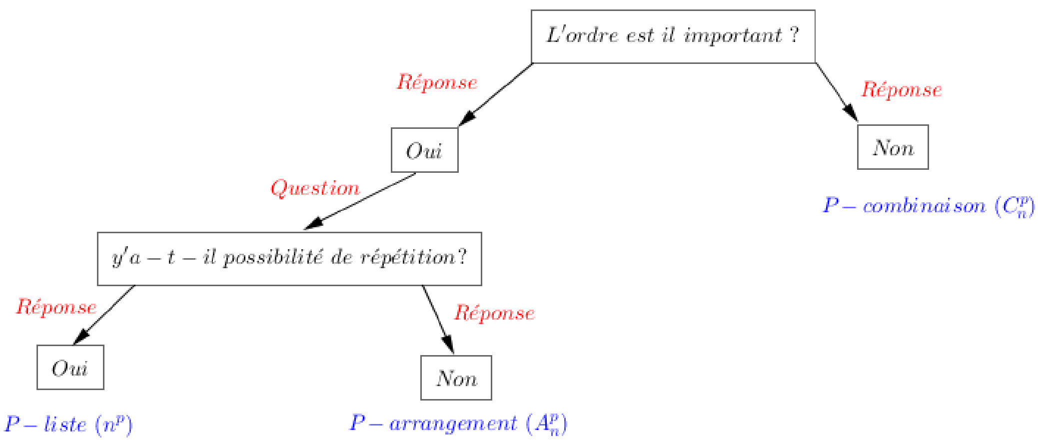
d. contenant au moins une boule jaune : $C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1$

e. contenant au plus une boule verte : $C_3^0 \times C_7^3 + C_3^1 \times C_7^2$

f. contenant 3 boules de même numéro. $C_3^3 + C_3^3$

g. contenant exactement 2 boules vertes : $C_3^2 \times C_8^1$

Remarque 9.2.6 *Dans un problème s'il n'apparait pas les expressions : "successivement sans remise", "successivement avec remise", "simultanément" dans l'optique à déterminer le modèle à utiliser nous allons nous poser les questions suivantes :*



Inspection d'Académie de Saint-Louis **Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé **Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté

Série n° 6 : Dénombrement

☞Exercice 1

Un sac contient cinq boules blanches numérotées 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ; trois boules rouges numérotées 1 , 2 , 3 et deux boules noires numérotées 1 , 2 . On suppose que toutes les boules ont la même chance d'être tirées .

• On tire simultanément deux boules du sac .

1. Calculer le nombre de tirages possibles .
2. Déterminer le nombre de tirage dans chacun des cas suivants :

   a) A : " tirer deux boules blanches "

   b) B : " tirer trois boules de même couleur "

   c) C : " tirer trois boules de couleur différente"

   d) D : "tirer trois boules portant le même numéro"

   e) E : "tirer au moins une boule rouge"

   f) F : "tirer au plus une boule noire"

• On tire successivement et sans remise trois boules du sac . Reprendre les mêmes questions.

• On tire successivement et avec remise trois boules du sac . Reprendre les mêmes questions.

☞Exercice 2

Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5 On les tire au hasard un par un en les plaçant les uns à côté des autres de la gauche vers la droite , de manière à former un nombre de cinq chiffres .

1. Calculer le nombre de possibilitś.
2. Calculer le nombre de façons d'obtenir un nombre pair .
3. Calculer le nombre de façons d'obtenir un nombre supérieur à 23 000

☞Exercice 3

On jette simultanément 3 dés identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note les résultats possibles .

1. Calculer le nombre de possibilités
2. Calculer le nombre de façons d'obtenir

   a) le même numéro

   b) des numéros différents

   c) le numéro 5 exactement une fois

☞Exercice 4

Une classe de 30 élèves dont 12 filles doit élire un comité comprenant un Président, un Vice-président et un Secrétaire . Le cumul de poste n'est pas autorisé

1. Combien de comités peut-on constituer ?
2. Calculer le nombre de façons d'obtenir :

   a) un comité dont le poste de Secrétaire est occupé par une fille

   b) un comité dont l'élève X est élu Président.

   c) un comité comprenant l'élève X

   d) un comité pour lequel le Président est une fille et le Secrétaire un garçon

   e) un comité pour lequel le Président et le Vice-président sont de sexes différents.

☞Exercice 5

Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9 . On tire successivement avec remise 4 boules de l'urne Combien y-a-t- il de tirages où le nombre formé :

1. commence par zéro .
2. se termine par zéro.
3. commence par zéro et se termine par zéro.
4. commence par zéro ou se termine par zéro.
5. Est paire.
6. Commence par un nombre pair et se termine par 3.

☞**Exercice 6**
Sur 72 élèves interrogés 50 prennent le taxi , 22 prennent le taxi et le vélo , 9 ne prennent ni l'un ni l'autre .
1. Combien de personnes prennent le vélo ?
2. Combien de personnes ne prennent que le vélo.

☞**Exercice 7**
La confédération africaine de football décide de classer par ordre les 3 meilleurs joueurs africains de l'année 2002, parmi un groupe de 10 joueurs choisis par les journalistes sportifs. Parmi les 10 joueurs figurent 3 sénégalais El Hadji DIOUF, Pape Bouba DIOP et Henri CAMARA.
1. Calculer le nombre de classements possibles.
2. Calculer le nombre de classements tels que :

a) les trois joueurs choisis soient des sénégalais.

b) El Hadji DIOUF soit élu meilleur joueur africain parmi les trois.

c) El Hadji DIOUF figure parmi les trois premiers joueurs choisis.

d) Seul le premier des 3 joueurs choisis est sénégalais.

e) Il y a au moins un sénégalais parmi les trois.

0 CHAPITRE 10 Probabilité

Chapitre 10 Probabilité

Introduction

Le hasard est une composante de la nature, il est donc nécessaire de trouver des objets mathématiques pour le modéliser : d'où la naissance de la théorie des probabilités. Cependant il est à noter que le concept des probabilités est surtout connu par l'intermédiaire des jeux. Nous les utiliserons pour définir différentes notions

10.1 Vocabulaire des probabilités

10.1.1 Expérience aléatoire

Le calcul des probabilités s'appuie sur des expériences aléatoires. Une expérience est dit aléatoire si :
• On ne peut pas prédire le résultats avec certitude.
• On peut décrire l'ensemble des résultats possibles.

☞ **Exemple 10.1.1** *Lancer d'une pièce de monnaie, le jet d'un dé, le choix d'une ou plusieurs boules dans une urne*

10.1.2 Evènement

Tout résultat d'une expérience aléatoire est appelé éventualité. L'ensemble des éventualités est appelé **Univers**, il est généralement noté Ω .
Toute partie de Ω est appelé évènement. Ainsi on a :
• Ω est appelé évènement certain
• L'ensemble vide Φ est appelé évènement impossible
• Un évènement réduit à un seul élément (singleton) est appelé évènement élémentaire

☞ **Exemple 10.1.2** *On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6*
• $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
• $\{1\}$, $\{2\}$,... *sont des évènements élementaires*

10.1.3 Evènements particuliers

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et$A$ et B deux évènements de celle-ci. On appelle :

• Evènement contraire de A, le sous ensemble complémentaire de A dans Ω. Il est noté $\overline{A}$.
• Evènement A ou B , l'ensemble $A \cup B$.
• Evènement A et B , l'ensemble $A \cap B$.
• Deux évènements incompatibles A et $B \Leftrightarrow A \cap B = \Phi$

10.2 Probabilité d'un évènement

Définition 10.2.1 *Soit E une expérience aléatoire d'univers Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . On appelle probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$, toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto [0;1]$ vérifiant :*
• $P(\Omega) = 1$.
• *Pour tous évènement A et B tels que $A \cap B = \Phi$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*

Conséquence 10.2.1

• *Pour tous évènements A on a : $0 \leq P(A) \leq 1$*
• $P(\Phi) = 0$.
• *La probabilité d'un évènement A est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.*

$$\text{Si } A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\} \text{ alors } P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_n\})$$

• *La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires de Ω est égale à 1.*

Propriété 10.2.1 *Soient A et B deux évènements.*
• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
• *Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$*
• $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

☞**Exercice d'application 10.2.1** *On lance un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les p_i vérifient :*

$p_1 = p_2$
$p_3 = p4 = 2p_1$
$p_5 = p_6 = 3p_1$.

1. Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{12}$.
2. Calculer la probabilités des évènements suivants :

A : "Obtenir 3 ou 6"; $P(A) = p_3 + p_6 = \dfrac{2}{3}$.

B : "Obtenir un nombre paire"; $P(B) = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{1}{2}$

C : "Obtenir un nombre impaire"; $P(C) = p_1 + p_3 + p_5 = \dfrac{1}{2}$ ou $P(C) = 1 - P(B)$

10.2.1 Cas où les évènements élémentaires sont équirobables

Lorsque évènements élémentaires ont la même probabilité on dit qu'il y a équirobabilité. Dans ce cas :
• La probabilité d'un évènement élémentaire $\{wi\}$ est $P(\{wi\} = \dfrac{1}{Card\Omega}$

- La probabilité d'un évènement quelconque A est $\boxed{P(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega}}$

$$\boxed{P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables\ pour\ A}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

Remarque 10.2.1 *Les expressions suivantes : "dé équilibré ou parfait ou non truqué ", "boule tirée de l'urne au hasard", "boule indiscernable",... indiquent que le modéle réalisé est équirobable.*

☞ **Exemple 10.2.1** *Une urne contient contient 4 boules blanches et 5 boules vertes. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :*

a) A :" tirer 3 boules de même couleur" : $P(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega} = \dfrac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3} = \dfrac{14}{84} = \dfrac{1}{6}$.

b) B :" tirer exactement deux boules blanches" : $P(B) = \dfrac{CardB}{Card\Omega} = \dfrac{C_4^2 C_5^2}{C_9^3} = \dfrac{30}{84} = \dfrac{5}{14}$.

c) C :" tirer au moins une boule verte" : $P(C) = \dfrac{CardC}{Card\Omega} = \dfrac{C_5^1 C_4^2 + C_5^2 C_4^1 + C_5^3 C_4^0}{C_9^3} = \dfrac{80}{84} = \dfrac{20}{41}$.

d) D :" tirer au plus une boule blanche" : $P(D) = \dfrac{CardD}{Card\Omega} = \dfrac{C_5^0 C_4^3 + C_5^1 C_4^2}{C_9^3}$.

10.2.2 Probabilité Conditionnelle

Définition 10.2.2 *P désigne une probabilité sur un univers fini . A et B étant deux évènements de Ω tels que $P(B) \neq 0$.*
On appelle probabilité Conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé le réel noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ et défini par

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Propriété 10.2.2 *Soient A et B deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.*

- $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B/A)P(B)$
- $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A/B)P(A)$

Evènements indépendants

Soient A et B étant deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre.
$P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$

Thèoréme 10.2.1 *Deux évènements A et B de probabilitéss non nulles sont indépendants ssi* $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Formule des probabilités totales

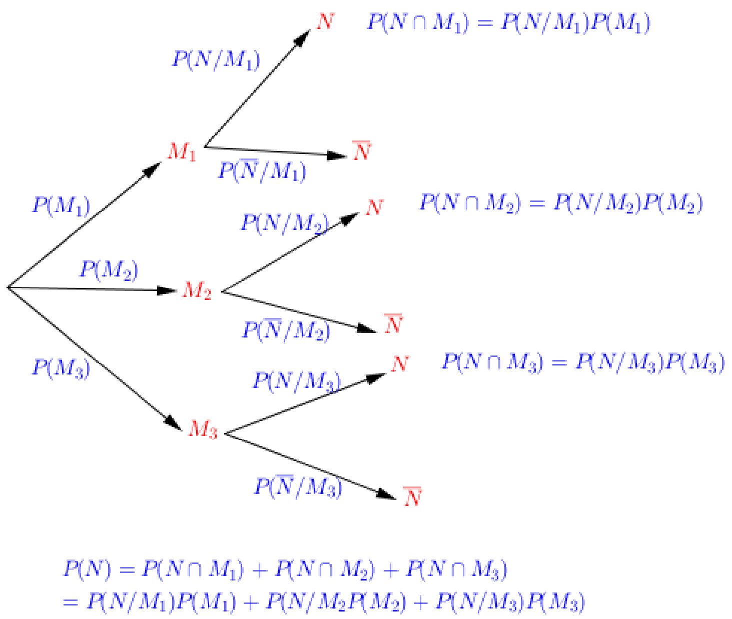
Soit E une expérience aléatoire d'univers Ω . Si les évènements B_1, $B2,\ldots,Bn$ forment une partition de Ω (avec $P(B_i) \neq 0$) alors pour tout évènement A, on a : $\boxed{P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)}$ ou
$\boxed{P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n)}$

Preuve 10.2.1 *On a :* $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ *et* $B_i \cap B_j = \Phi$ *si* $i \neq j$*.*
$A \subset \Omega$ *donc :*

$$\begin{aligned}
A &= A \cap \Omega \\
&= A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) \\
&= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n) \textit{ or les } (A \cap B_i) \textit{ sont incompatibles} \\
&\Rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) \\
&\Rightarrow P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n)
\end{aligned}$$

Illustration : Arbre de probabilité

Pour déterminer des probabilités on peut amener à construire un arbre dont les branches sont affectées des probabilités.
Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud (feuille) vaut 1.
Règle 2 : La probabilité d'une feuille (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.
Règle 3 : La probabilité d'un évènement associé à plusieurs feuilles est égale à la somme des probabilités de chacune de ces feuille.



☞**Exercice d'application 10.2.2** *Une usine fabrique des ampoules électrique à l'aide de trois machines A, B et C.*

• *La machine A assure* 20% *de la production et*5% *des ampoules fabriquées par A sont défectueuses.*

• *La machine B assure* 30% *de la production et* 4% *des ampoules fabriquées par B sont défectueuses.*

• *La machine C assure* 50% *de la production et* 1% *des ampoules fabriquées par C sont défectueuses.*

1. On choisit au hasard une ampoule. Calculer les probabilités :

a) pour que l'ampoule soit défectueuse et produit par A : $P(D \cap A) = 0,01$

b) pour que l'ampoule soit défectueuse et produit par B : $P(D \cap B) = 0,012$

c) pour que l'ampoule soit défectueuse et produit par C : $P(D \cap C) = 0,005$

En déduire la probabilité pour qu'une ampoule prise au hasard soit défectueuse. $P(D) = 0,027$.

2. On choisit au hasard une ampoule, elle est dfectueuse. Calculer la probabilité pour qu'elle :

a) provienne de A : $P(A/D) = \dfrac{10}{27}$

b) provienne de B :$P(B/D) = \dfrac{4}{9}$

c) provienne de C : $P(C/D) = \dfrac{5}{27}$

☞**Exercice d'application 10.2.3** *On dispose de deux urnes* U_1 *et* U_2. *L'urne* U_1 *contient 3 boules noires et 1 boule blanche, l'urne* U_1 *contient 1 boule noire et 2 boules blanches. On jette un dé cubique parfaitement équilibré. Si le dé donne 6, on tire au hasard une boule de l'urne* U_2 *; sinon on tire au hasard une boule de l'urne* U_1. *On désigne par :*

S l'évènement "on obtient 6 avec le dé"

N l'évènement "on tire une boule noire".

1. Calculer la probabilité des évènements $S \cap N$ *et* $S \cap \overline{N}$ *:*

$P(S \cap N) = \dfrac{1}{18}$ *et* $P(\overline{S} \cap N) = \dfrac{5}{8}$.

2. Calculer la probabilité de tirer une boule noire :

$P(N) = \dfrac{49}{72}$.

3. Calculer la probabilité d'avoir 6 avec le dé, sachant que l'on a tiré une boule blanche :

$P(S/\overline{N}) = \dfrac{8}{23}$.

☞**Exercice d'application 10.2.4** *La probabilité que l'élève Kara arrive en retard à l'école le* 1^e *jour est* $\dfrac{1}{5}$.

• *S'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est* $\dfrac{1}{20}$.

• *S'il est à l'heure un jour donné , la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est* $\dfrac{1}{5}$.

On appelle R_n *l'évènement "Kara est en retard le jour n" et* p_n *la probabilté de* R_n.

1. Déterminer $\mathbb{P}(R_{n+1} \bigcap R_n$ *et* $\mathbb{P}(R_{n+1} \bigcap \bar{R_n})$ *en fonction de* p_n.

2. En déduire que $p_{n+1} = -\dfrac{3}{20}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *,* $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

a) Montrer que (v_n) *est une suite géométrique de raison* $-\dfrac{3}{20}$.

b) Exprimer v_n *puis* p_n *en fonction de* n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bar{R}_n)$

Remarque 10.2.2 *Soit une expérience aléatoire d'univers , P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et A est un évènement lié à cette expérience. Si on répète n fois de suite cette expérience de manière indépendante alors la probabilité de réaliser k fois évènement A au cours de n répétitions est :* $C_n^k[P(A)]k[1-P(A)]^{n-k}$

10.3 Variables aléatoires

Définition 10.3.1 *Soit une expérience aléatoire d'univers. On appelle variable aléatoire, toute application X définie de Ω dans $\mathbb{R}$.*
On appelle ensemble image de Ω par X, l'ensemble des valeurs possibles de X qui est noté $X(\Omega)$.

10.3.1 Définitions d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω et X variable aléatoire définie sur Ω.
.Soit $k \in X(\Omega)$.

- $(X = k)$ est l'ensemble des éventualités dont l'image par X est égale à k.
- $(X \leq k)$ est l'ensemble des éventualités dont l'image par X inférieur ou égale à k.

10.3.2 Loi de probabilité

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, munie d'une probabilité P. Soit X une variable aléatoire définie de Ω dans $\mathbb{R}$ et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.
On appelle loi de probabilité de la variable X , l'application qui à tout $x_i \in X(\Omega)$, fait correspondre $P(X = x_i)$

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\ldots$	$P(X = x_n)$

NB : $\sum\limits_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

10.3.3 Espérance mathématique, variance et écart type de X

Soit X une variable aléatoire réelle et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. On appelle :

- **Espérance mathématique de** X, le réel noté $\mathbb{E}(X)$ et défini par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)}$$

- **Variance de** X, le réel positif noté $V(X)$ et défini par :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

- **Ecart type de** X, le réel positif noté $\sigma(X)$ et défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

10.3.4 Fonction de répartition

On appelle **fonction de réppartition** de la variable X l'application F définie de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$ par $F(x) = P(X \leq x)$

☞**Exercice d'application 10.3.1** *Une urne contient 3 boules blanches, 3 boules vertes et 1 boule jaune. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirae associe le nombre de boules blanches tirées.*
1. Déterminer l'ensemble image de Ω par X.
2. D'eterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Déterminer la fonction de répartition de X et construire sa courbe.

☞**Exercice d'application 10.3.2** *Une boîte contient 6 boules vertes et n boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne $100F$ et si les boules sont couleurs différentes, le joueur perd $100F$.*
1. Dans cette question on suppose $n = 3$.
a) calculer la probabilité des évènements suivants :
A : "Avoir deux boules de même couleur";
B :" Avoir deux boules de couleurs différentes".
b) Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit verte ?
2. Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque et supérieur à 3. on note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successif sans remise de deux boules associe le gain algébrique en francs du joueur.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $\mathbb{E}(X) = 100\dfrac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)}$.
c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathbb{E}(X) < 0$?

☞**Exercice d'application 10.3.3** *Un urne contient x boules rouges, $8 + x$ boules noires et 20 boules blanches. x étant un entier naturel non nul.*
Un joueur tire une boule de l'urne; on suppose tous les tirages équiprobables.
• *S'il tire une boule rouge, il perd.*
• *S'il tire une boule noire, il gagne.*
• *S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilitée. S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.*
On considère l'évènement A : " Le joueur gagne". On pose $p(x)$ la probabilité de A.
1. Démontrer que $p(x) = \dfrac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$.
2. Etudier les variations de p sur $[1;+\infty[$. En déduire la valeur de x pour que la probabilité de A soit maximale et la valeur de cette probabilité maximale
3. Dans cette question, on suppose que $x = 16$. Pour jouer, le joueur a misé 800 francs . S'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet 1600 francs et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet 1200 francs . S'il perd il ne reçoit rien.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
a) Déterminer la loi de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?(Rappel : Le

jeu est équitable si l'espérance du gain algébrique est nulle)
c) Déterminer l'écart type de X.

10.4 Schèma de Bernoulli : Loi Binomiale

10.4.1 Epreuve de de Bernoulli

Définition 10.4.1 *Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées **succès** notée S et **échec** notée $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $1-p$. La loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.*

Issues	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1-p$

☞ **Exemple 10.4.1** *Lancer d'une pièce de monnaie :*

$\Omega = \{P, F\}$

Issues	F	P
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\Omega = \{0, 1\}$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

10.4.2 Schèma de Bernoulli

Définition 10.4.2 *On appelle schèma de Bernoulli une expérience qui consiste à répéter plusieurs fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli.*

☞ **Exemple 10.4.2**
• *Si on jette 3 fois la même pièce de monnaie, on est en présence d'un schèma de Bernoulli à 3 épreuve.*
• *Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules blanches. Une expérience consiste à extraire 3 boules de cette urne et à noter sa couleur.*

♣ *Si le tirage des 3 boules se fait avec remise, on est bien en présence d'un schèma de Bernoulli à 3 épreuve. La probabilité du succès (A :"obtenir 1 boule blanche") est $\frac{5}{8}$ et celui de l'échec (B :"obtenir 1 boule noire") est $\frac{3}{8}$.*

♣ *Si le tirage des 3 boules se fait sans remise, nous ne sommes pas en présence d'un schèma de Bernoulli puisque les épreuves ne sont pas indépendantes les unes des autres.*

10.4.3 Loi Binomiale

Définition 10.4.3 *Soit X la variable aléatoire qui, à chaque liste de n résultats associe le nombre de succès. La loi de probabilité de X est appelée **loi Binomiale** de **paramètre** n et p. Cette loi est notée $\mathcal{B}(n, p)$. On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$*

- *n est le nombre d'épreuves*
- *p est la probabilté du succès lors d'une épreuve.*

Remarque 10.4.1 *Un schèma de Bernoulli s'illustre par un arbre dans le quel, de chaque noeud partent deux nombres.*
- *Toutes les branches menant à un succès portent la même probabilité p.*
- *Toutes les branches menant à une échec portent la même probabilité $1-p$.*

Propriété 10.4.1 *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors on a :*

S	S	E	S	E	E	S	S	$\ldots$	S	E	S

on a : n épreuves , k succès et $n-k$ échecs.
p^k : probabilité d'avoir les k succès et p^{n-k} échecs puis on choisit k places parmi les n places pour placer les succès, soit C_n^k et $n-k$ places parmi les $n-k$ places restantes pour placer les échecs, soit C_{n-k}^{n-k} . On alors $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = C_n^k \times C_{n-k}^{n-k} p^k(1-p)^{n-k}$ ou encore $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.
- $X(\Omega) = \{0;1;2;\ldots;n\}$
  - $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
  - $\mathbb{E}(X) = np$
  - $V(X) = np(1-p)$

Inspection d'Académie de Saint-Louis	**Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé	**Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté	

Série n° 7 : Calcul des Probabilités

☞**Exercice 1**
Fatou a dans sa pochette trois paires de boucles d'oreilles ; une paire rouge, une paire noire et une paire verte indiscernables au toucher. Elle veut porter deux boucles d'oreilles en tirant successivement deux dans sa pochette.
1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a) A : "Les boucles extraits sont de même couleur"
   b) B : "Une boucle noire et une boucle rouge sont tirées".
   c) C : "Une boucle noire et une boucle rouge sont tirées dans cet ordre".
   d) D : "La deuxième boucle est verte".
   e) E : "Les deux tirées boucles sont de couleurs différentes".
2. Si une boucle noire est tirée, quelle est la probabilité que la deuxième boucle soit rouge ?

☞**Exercice 8**
TANOH écrit les lettres de son nom sur 5 cartons et les met dans un chapeau. Ensuite, il tire successivement et sans remise 3 cartons du chapeau qu'il dépose devant lui de la gauche vers la droite. Il obtient un mot (ayant un sens ou non).
1. Vérifier que le nombre de mots possibles est égal à 60.
2. Parmi ces mots :
   a) Combien finissent par T ?
   b) Combien ne comporte aucune voyelle ?
   c) Combien commence par une consonne ?
   d) Combien comporte qu'une seule consonne ?
3. Démontrer que la probabilité d'avoir un mot terminé par T est égale à 0,2.
4. Calculer la probabilité d'avoir un mot comportant au moins une voyelle.
5. Calculer la probabilité d'avoir un mot comportant les lettres O et H.

☞**Exercice 1**
On considère deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires ; U_2 contient 5 boules blanches et 1 boule noire. L'expérience consiste à tirer une boule dans chaque urne. Le tirage est équiprobable.
Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) A : "Avoir deux boules blanches"
   b) B : "Avoir deux boules noires"
   c) C : "Avoir une boule blanche et une boule noire ".

☞**Exercice 1**
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient 4 boules blanches et 1 boule noire ; U_2 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On choisit au hasard une urne, puis une boule dans l'urne choisie.
1. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire :
   a) Sachant que l'urne choisie est U_1.
   b) Sachant que l'urne choisie est U_2.
2. En déduire la probabilité de tirer une boule noire.
3. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche.

☞**Exercice 1**
Un urne contient x boules rouges, $8 + x$ boules noires et 20 boules blanches. x étant un entier naturel non nul.

Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables.

- S'il tire une boule rouge, il perd.
- S'il tire une boule noire, il gagne.
- S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilitée. S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.

On considère l'évènement A : " Le joueur gagne". On pose $p(x)$ la probabilité de A.

1. Démontrer que $p(x) = \dfrac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$.

2. Etudier les variations de p sur $[1;+\infty[$. En déduire la valeur de x pour que la probabilité de A soit maximale et la valeur de cette probabilité maximale

3. Dans cette question, on suppose que $x = 16$. Pour jouer, le joueur a misé 800 francs .

S'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet 1600 francs et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet 1200 francs . S'il perd il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?(Rappel : Le jeu est

équitable si l'espérance du gain algébrique est nulle)

c) Déterminer l'écart type de X.

☞**Exercice 2**

Une urne contient trois boules rouges numérotées 1, 2, 2 et trois boules blanches numérotées 1, 1, 2. Un épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A : "Avoir trois boules de même couleur"

b) B : "La somme des nombres inscrits sur les boules tirées est égale à cinq".

2. Soit C l'évènement "Avoir au moins une boule rouge qui porte le numéro 2".

Montrer que $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = \dfrac{4}{5}$.

3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules rouges portant le numéro 2 obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

4. On répète l'épreuve précédente n fois $(n \geq 1)$ de suite, en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne.

a) Calculer la probabilité p_n, pour que l'évènement C soit réalisé qu moins une fois.

b) Déterminer le plus entier n tel que $p_n \geq 0,99$.

☞**Exercice 3**

Une urne contient quatre dés indiscernables au toucher. Trois dés sont verts et leurs faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et un dé est rouge et ses faces sont numérotées 2, 2, 4, 4, 6, 6.

1. On tire au hasard un dé. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A : "Le dé tiré est rouge"

b) B : "Le dé tiré est vert".

2. Une épreuve consiste à tirer au hasard un dé puis le lancer trois fois de suite. On désigne par C l'évènement suivant : C :"Obtenir trois fois de suite un numéro pair".

a) Montrer que $\mathbb{P}(C/A) = 1$ et $\mathbb{P}(C/B) = \dfrac{1}{8}$.

b) En déduire $\mathbb{P}(C)$.

3. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'on a obtenu une face dont le numéro est pair.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

☞**Exercice 4**

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernable au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton, puis jeter le dé :

• Si le jeton est blanc, le joueur perd le jeu lorsque le jet du dé donne 6 ;

• Si le jeton est noir, le joueur perd le jeu lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.
On donne les évènements suivants :

B :" Le jeton tiré est blanc"

N :" Le jeton tiré est noir"

G :" Le jeton gagne"

Partie A :

1. Montrer que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{7}{30}$. On peut s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le jouer ait tiré un jeton blanc sachant qu'il a perdu.
3. Un joueur fait quatre parties de façons indépendantes. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel est le nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99.

Partie B : L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent.

• Chaque joueur paie 1 euro.

• Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 euros.

• Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable alàtoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à d'une partie.

a) Vérifier que $X(\Omega) = \{-1; 4\}$. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance

$\mathbb{E}(X)$.

b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathbb{E}(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à

l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.Pour quelle valeur de l'entier n le jeu ets-il défavorable à l'organisateur ?

☞**Exercice 5**

La probabilité que l'élève Kara arrive en retard à l'école le 1^e jour est $\dfrac{1}{5}$.

• S'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{20}$.

• S'il est à l'heure un jour donné , la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{5}$.

On appelle R_n l'évènement "Kara est en retard le jour n" et p_n la probabilté de R_n.

1. Déterminer $\mathbb{P}(R_{n+1} \bigcap R_n$ et $\mathbb{P}(R_{n+1} \bigcap \bar{R}_n)$ en fonction de p_n.
2. En déduire que $p_{n+1} = -\dfrac{3}{20}p_n + \dfrac{1}{5}$.
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.

b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bar{R}_n)$.

☞**Exercice 14**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

• On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2.

• On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2.

L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
On note les évèments suivants :

B_1 : "on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1".

N_1 : "on a tiré une boule noire dans l'urne U_1".

B_2 : "on a tiré une boule blanche dans l'urne U_2".

N_2 : "on a tiré une boule noire dans l'urne U_2".

1. a) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

b) Montrer que $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{3k+6}{4k+12}$.

c) En déduire la valeur de k pour que cette probabilité soit égale à $\dfrac{14}{15}$.

2. Dans la suite on considère $k = 12$. Un joueur mise 800 francs et effectue une épreuve.

• Si, à la fin de lépreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit

1200 francs.

• Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

d) Le jeu est-il favorable au joueur ?

☞**Exercice 7**

Une urne contient 3 boules vertes, 5 boules blanches et 2 boules rouges indiscernables au toucher. Après avoir misé, un joueur tire au hasard 3 boules de l'urne.

• Si des boules de même couleur sont tirées il gagne 16 euros.

• Si les trois boules sont de couleurs différentes il recupère sa mise.

• Sinon, il perd sa mise.

La mise est de 10 euros.

1. Soit A : "Des boules de même couleurs sont tirées", B : "les trois boules sont de couleurs différentes". Calculer $\mathbb{P}(\mathbb{A})$ et $\mathbb{P}(\mathbb{B})$.

2. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Déterminer les valeurs possibles de X.

b) Déterminer la loi de X.

c) Calculer l'éspérance mathématique de X.

3. Un individu joue trois fois de suite, déterminer la probabilité qu'il gagne au moins 20 euros.

☞**Exercice 8**

Une boîte contient 6 boules vertes et n boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne $100F$ et si les boules sont couleurs différentes, le joueur perd $100F$.

1. Dans cette question on suppose $n = 3$.

a) calculer la probabilité des évènements suivants :

A : "Avoir deux boules de même couleur" ;

B :" Avoir deux boules de couleurs différentes".

b) Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pour que

la deuxième boule tirée soit verte ?

2. Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque et supérieur à 3. on note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successif sans remise de deux boules associe le gain algébrique en francs du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $\mathbb{E}(X) = 100\dfrac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$.

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathbb{E}(X) < 0$?

☞**Exercice 9**

Une urne contient 6 jetons rouges et 4 jetons jaunes. Un jeu consiste à tirer simultanément 2 jetons de l'urne. Si les jetons sont de même couleur, le joueur gagne 1000 FCFA. S'ils sont de couleurs différentes, alors le joueur perd 1000 FCFA.

1. a) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur.

b) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes.

2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux jetons associe le gain ou la perte du joueur.

a) Donner les différentes valeurs possibles de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

☞**Exercice 10**

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un pays. On estime que 7% des bovins sont atteints. On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie, on a établi que :

• quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas

• quand il n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.

Considérons les 'evènement suivants : M : "Etre malade" et T :"Avoir un test positif".

1. Calculer $\mathbb{P}(M \cap T)$, $\mathbb{P}(\bar{M} \cap \bar{T})$ et $\mathbb{P}(M \cap \bar{T})$.
2. En déduire la probabilité de T.
3. Quelle est la probabilité pour qu'un animal ayant un test négatif soit malade.

☞**Exercice 11**

Un forain organise des loteries de la façon suivante : Il dispose d'une grande roue partagée en douze secteurs circulaires, de superficies égales, numérotées de 1 à 12. Lors de chaque partie, il fait tourner cette grande roue qui s'arrête et indique le numéro d'un secteur. On admet que les douze numéros sont équiprobables.

• Si la roue s'arrête sur un numéro pair, tout joueur gagne un stylo

• Si la roue s'arrête sur un multiple de 3, tout joueur gagne un porte-clefs.

1. Un joueur effectue une partie. Quelle est la probabilité des évènements suivants :

A : "Gagner un stylo"

B : "Gagner un porte-clefs"

C : "Gagner un stylo et un porte-clefs"

2. Un joueur effectue quatre parties consécutives indépendantes répétées dans les mêmes conditions. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de porte-clefs gagnés au bout des quatre parties. Déterminer la loi de probabilité de X et l'espérance mathématique de X.

☞**Exercice 12**

Un sac contient contient 4 boules vertes et 6 boules rouges. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. Soit E l'évènement " Tirer trois boules vertes"

1. Calculer $\mathbb{P}(E)$.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X, l'espfance mathématique de X et l'écart type de X.

b) Définir et représenter la fonction de répartition F de X.

3. On répéte 10 fois l'expérience en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans le sac. Quelle est la probabilité pour que l'évènement E se réalise 7 fois à l'issu des 10 tirages? ☞**Exercice 13**

On teste un médicament parmi un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant un placebo [1], et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de taux pour 90% des personnes ayant le placebo. On appelle :

M l'évènement "avoir pris le médicament"

B l'évènement "avoir une baisse du taux de glycémie".

1. En utilisant l'galité $B = (M \cap B) \cup (\bar{M} \cap B)$, montrer que la probabilité de B est égale à $0,52$.
2. On soumet au test un individu pris au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'il ait pris le médicament si on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie ?

3. On contrôle cinq individus au hasard.

1. Substance que l'on substitue à un médicament (sans que la personne testée le sache) pour tester les effets de celui-ci par comparaison

Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux n'a pas baissé ? Le résultat sera donné sous forme décimale à 10^{-3} près.

☞**Exercice 8**

Un porte- monnaie contient quatre pièces de 500 et six pièces de 200. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièce de ce porte-monnaie.

1. Calculer la probabilité de l'évènement :
   A= " tirer trois pièces de 500 "
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 figurant dans le tirage.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
3. Soit Y la somme de la valeur faciale des pièces tirées.
   a) Déterminer les valeurs prises par Y.
   b) Calculer l'écart-type de Y.
4. L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque les trois pièces tirées dans le porte-monnaie. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages.

☞**Exercice 8**

Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints du paludisme. On choisit au hasard un individu parmi cette population. Calculer la probabilité pour que cet individu soit :

a) Un homme atteint du paludisme.

b) Une femme atteinte du paludisme.

c) Une personne atteinte du paludisme.

d) Un homme non atteint du paludisme.

e) Un homme, sachant qu'il est atteint du paludisme.

f) Une femme, sachant qu'elle est atteinte du paludisme.

Troisième partie

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

1 CHAPITRE 11

Les nombres Complexes

Approche Historique

• Au d ?but du $XVI?me$ si ?cle, le math ?maticien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux ?quations du $3^{\text{ème}}$ degr ? de la forme $x^3 + px = q$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}.$$

• A la fin de ce si ?cle, Bombelli applique cette formule ? l' ?quation $x^3 - 15x = 4$.
Il obtient littéralement : $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$.
Cette ?criture pose un probl ?me majeur puisqu'elle am ?ne ? consid ?rer le nombre $\sqrt{-1}$ qui n'a encore aucun sens. N ?anmoins, Bombelli va plus plus loin, il remarque en utilisant les r ?gles de calcul usuelles que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \text{ et } (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Par cons ?quent, il obtient : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.
Or, $x = 4$ est bien une solution de l' ?quation $x^3 - 15x = 4$. Une question naturelle s'est alors pos ?e : peut-on l ?gitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est n ?e la th ?orie des nombres complexes...

Approche ensembliste

• L' ?quation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle admet une solution -1 dans un ensemble plus grand $\mathbb{Z}$.
• De m ?me, l' ?quation $3x = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle admet $\frac{1}{3}$ comme solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ plus vaste que $\mathbb{Z}$.
• Et puis, l' ?quation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans $\mathbb{R}$ pour en trouver.

En clair, quand une ?quation n'a pas de solutions, une d ?marche naturelle (et historique) pour en trouver consiste en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances, l'ensemble num ?rique le plus Pourtant l' ?quation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ . . .
On va donc, dans ce chapitre «construire ?» enfin plut ?t imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l' ?quation $x^2 + 1 = 0$ poss ?de des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal ?l ?ment de $\mathbb{C}$ sera not ? i (i comme imaginaire) et v ?rifiera $i^2 = -1$. L' ?quation pr ?c ?dente poss ?dera alors deux solu-

tions : $x^2+1=0 \Leftrightarrow (x+i)(x-i)=0 \Leftrightarrow x=i \quad ou \quad x=-i$
Je vous rassure tout de m ?me, il n'existe pas d'ensemble plus grand que $\mathbb{C}$ permettant de r ?soudre des ?quations polyn ?miales.

Eléments d'histoire

En 1637, Descartes propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est Gauss en 1831 qui le premier les nomme les «nombres complexes ».
Euler, d ?clarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit ? une contradiction de la d ?finition, introduit la notation i (comme imaginaire) en 1777 pour le nombre qui v ?rifie $i^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ appara ?t alors : ce sont les nombres de la forme $a+ib$, avec a et b r ?els. Les r ?gles de calculs dans $\mathbb{R}$ sont conserv ?es.
Les nombres imaginaires prennent alors leur statut officiel de nombres, avec notamment une repr ?sentation g ?om ?trique de chaque nombre $x+iy$ avec x et y r ?els par le point du plan de coordonn ?es $(x;y)$. Ils ont notamment servi pour formaliser la th ?orie de la relativit ? d'Einstein (1905). A notre niveau, ils sont utiles en g ?om ?trie et pour la r ?solution toutes les ?quations.

11.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

11.1.1 Définition

Définition 11.1.1
On appelle nombre complexe, tout nombre z pouvant s'écrire sous la forme $z=a+ib$ où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et i un nombre tel que $i^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

☞ **Exemple 11.1.1**
$z_1=2+3i$ *($a=2$ et $b=3$) ;* $z_2=-2i$ *($a=0$ et $b=-2$) ;* $z_3=2$ *($a=2$ et $b=0$)*

11.1.2 Vocabulaire et notation

- $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le réel a est appelé la **partie réelle** de z, on note $\Re e(z)=a$
- Le réel b est appelé la **partie imaginaire** de z, on note $\Im m(z)=b$

☞ **Exemple 11.1.2**

$z_1=2+3i$; $\Re e(z_1)=2$ *et* $\Im m(z_1)=3$
$z_2=-7-2i$; $\Re e(z_2)=-7$ *et* $\Im m(z_2)=-2$
$z_3=-2i$; $\Re e(z_3)=0$ *et* $\Im m(z_3)=-2$
$z_4=3$; $\Re e(z_4)=3$ *et* $\Im m(z_4)=0$
$z_5=0$; $\Re e(z_5)=0$ *et* $\Im m(z_5)=0$

Remarque 11.1.1 *Soit $z=a+ib$ un nombre complexe.*
- *Si $a=0$ alors $z=ib$ est appelé un nombre imaginaire pur.*
- *Si $b=0$ alors $z=a$ est appelé un nombre réel.*
- *L'ensemble des nombres imaginaires pur est noté $i\mathbb{R}$*

Propriété 11.1.1

- *Un nombre complexe z est dit réel si sa partie imaginaire est nulle.*
  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im m(z) = 0$
- *Un nombre complexe z est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle*
  $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re e(z) = 0$

11.1.3 Nombre complexe nul

Propriété 11.1.2

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes nulles.

Soit $z = a + ib$ on a : $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

11.1.4 Egalité de deux nombres complexes

Propriété 11.1.3

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ on a : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

11.1.5 Représentation géométrique des nombres complexes

On appelle plan complexe, tout plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Principe

- Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être associé au point $M(a; b)$.
- Réciproquement , à tout point $M(a; b)$, on peut correspondre le nombre complexe $z = a + ib$.

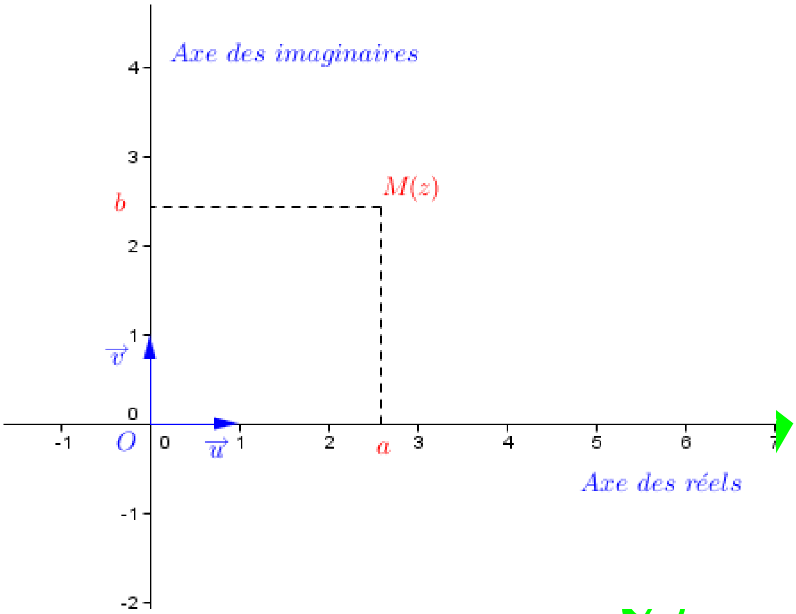
Vocabulaire

- Le point $M(a; b)$ est appelé image du nombre complexe $z = a + ib$.
- Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé l'affixe du point $M(a; b)$.

Notation

On note souvent $M(z)$ et se lit " M le point d'affixe z ". Parfois on note aussi $z_M = a + ib$

Illustration



• L'axe des abscisse est appelé l'axe des réels.
• L'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires.

☞ **Exemple 11.1.3** *Le plan est muni d'un ROND* $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Placer les points A, B, C et D tels que $z_A = 1 + i$; $z_B = 2 - 3i$; $z_C = 2$ *et* $z_A = -i$

11.1.6 Affixe d'un vecteur, du milieu d'un segment et d'un barycentre

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.

• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z$

• L'affixe du point I milieu de $[MM']$ est $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$

• Si $G = bar\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ avec $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ alors l'affixe de G est $z_G = \dfrac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c}$

• Si G est l'isobarycentre des points avec $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ alors l'affixe de G est $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

☞ **Exemple 11.1.4** *Soient* $A(1 + i)$, $B(2 + 3i)$ *et* $C(-2 + 2i)$ *trois points du plan complexe. Soient* I *milieu de* $[AB]$ *et* $G = bar\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$.
1. Déterminer l'affixe du point I*, l'affixe du point* G *et l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer l'affixe du centre de gravité G' *du triangle* ABC.

11.1.7 Calcul dans $\mathbb{C}$

Toutes les réles du calcul dans $\mathbb{R}$ restent valables dans $\mathbb{C}$.
Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes

Somme

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

Produit

$z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

Propriété 11.1.4

- $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2iab - b^2$
- $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$

Quotient

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}$$

☞**Exercice d'application 11.1.1**
On donne $z_1 = -4 - i$ *et* $z_2 = 3 + 2i$ *et* $z_3 = x^2 - 4x + (-1 - 2y)i$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \times z_2$ *et* $\dfrac{z_1}{z_2}$

b) Déterminer x *pour que* z_3 *soit imaginaire pur.*

d) Déterminer y *pour que* z_3 *soit réel.*

Puissance de i : Calcul de i^n

n	0	1	2	3
i^n	1	i	-1	-i

NB : Si $n \geq 4$ alors $i^n = i^r$ avec le reste de la division euclidienne de n par 4.

☞ **Exemple 11.1.5** *Simplifier* i^8, i^{37}, i^{2016} *et* i^{2011}

Triangle de Pascal : Pour développer $(a + b)^n$

n=0 1
n=1 1 1 $\Longrightarrow (a + b)^1 = a + b$
n=2 1 2 1 $\Longrightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
n=3 1 3 3 1 $\Longrightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
n=4 1 4 6 4 1 $\Longrightarrow (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
Cette disposition porte le nom de "Triangle de Pascal"

☞ **Exemple 11.1.6** *Simplifier* $z_1 = (1 + 2i)^4$ *et* $z_2 = (2 - 2i)^3$

11.1.8 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 11.1.2 *On appelle* ***conjugué*** *d'un nombre comlexe $z = a + ib$ le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par :* $\bar{z} = \overline{a+ib} = a - ib$

☞ **Exemple 11.1.7**

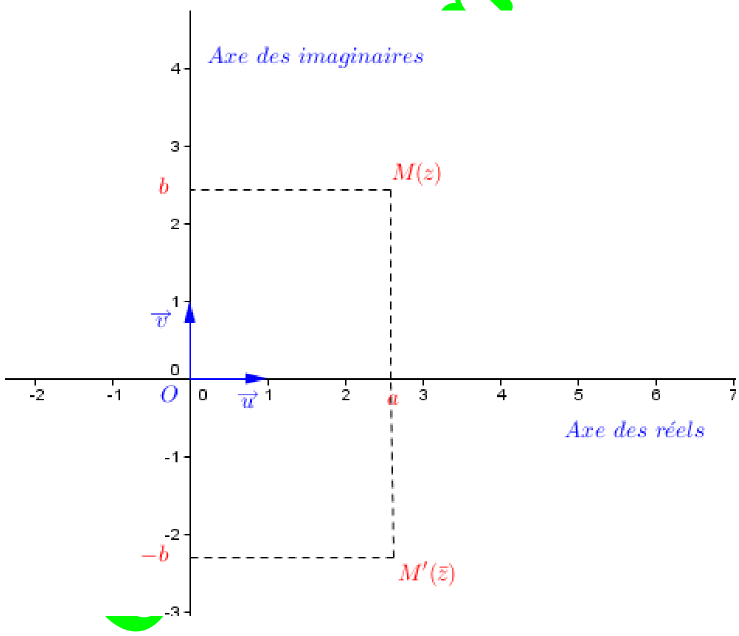
$$z_1 = 1 + i \Longrightarrow \bar{z_1} = 1 - i$$
$$z_2 = -3 - 4i \Longrightarrow \bar{z_2} = -3 + 4i$$
$$z_3 = 2 \Longrightarrow \bar{z_3} = 2$$
$$z_4 = -2i \Longrightarrow \bar{z_4} = 2i$$

Propriété 11.1.5 *Soient z zt z' deux nombres complexes. On a :*

- $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$; • $z - \bar{z} = 2i\Im m(z)$; • $z\bar{z} = [\Re e(z)]^2 + [\Im m(z)]^2$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Illustration

Soient $M(z)$ et $M'(\bar{z})$. M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



☞ **Exemple 11.1.8**

1. Déterminer la forme alébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = \dfrac{1}{2+4i}$; *b.* $z_2 = \dfrac{3+2i}{1-5i}$.

2. Soit Z le nombre complexe défini par $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$ *avec z un nombre complexe différent de* 1. *Soit A le point d'affixe* 1.

a. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
b. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que
- *Z soit réel ;*
- *Z soit imaginaire pur.*

11.2 Forme trigonométrique-Forme exponentielle d'un nombre complexe

11.2.1 Module d'un nombre complexe

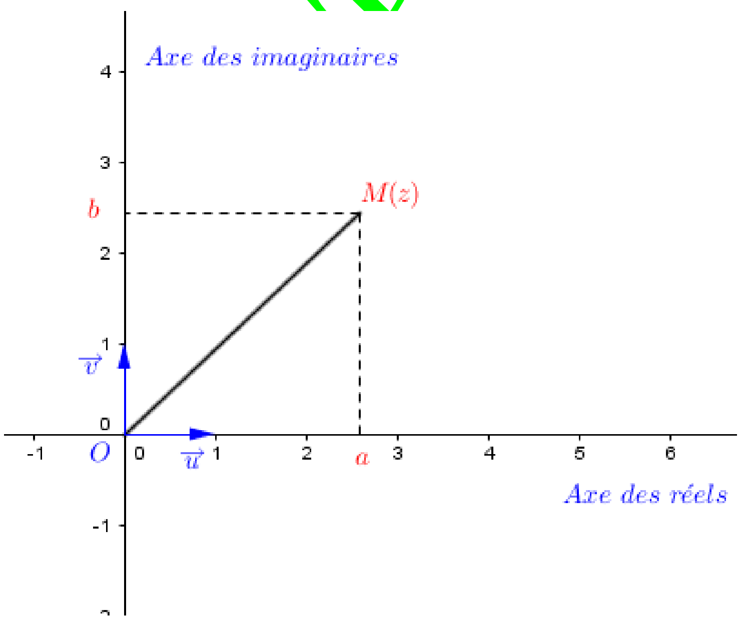
Définition 11.2.1
*On appelle **module** du nombre complexe z, le réel positif noté $|z|$ et défini par*
$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
Si $z = a + ib$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

☞ **Exemple 11.2.1**

$$z_1 = 1 + i \Longrightarrow |z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$z_2 = -1 - i\sqrt{3} \Longrightarrow |z_2| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$z_3 = 4 - 3 \Longrightarrow |z_3| = |4 - 3i| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$z_4 = 4i \Longrightarrow |z_4| = |4i| = \sqrt{(4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$z_5 = 3 \Longrightarrow |z_5| = |3| = \sqrt{(3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

Interprétation géométrique du module

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M le point d'affixe $z = a + ib$
On a : d'une part $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et d'autre part $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $|z| = OM$.
Alors le module s'interprète géométriquement comme une distance.



Remarque 11.2.1 *Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $M(z)$ quatre points du plan. On a :*
- $|z_B - z_A| = AB$; • $|z - z_A| = AM$; • $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$; • $\left|\dfrac{z - z_A}{z - z_A}\right| = \dfrac{MA}{MB}$

☞**Exercice d'application 11.2.1** *Soient $A(2+i)$, $B(3i)$ et $M(z)$.*
On pose $Z_1 = \dfrac{z-2-2i}{z-3i}$; $Z_2 = z-2-i$ *et* $Z_3 = \dfrac{iz-2i+1}{2z-6i}$.
Interpréter géométriquement $|Z_1|$, $|Z_2|$ *et* $|Z_3|$.

Propriété 11.2.1 *Soient z et z' deux nombres complexes. On a :*
- $|z| = |\bar{z}|$; • $|zz'| = |z| \times |z'|$; • $|z^n| = |z|^n$;
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$; • $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

☞**Exercice d'application 11.2.2**
1. Dans chacun des cas suivants déterminer le module de z.
a. $z = -\sqrt{3}+i$; *b.* $z = 1+i$; *c.* $z = 2(-\sqrt{3}+i)^4$;
d. $z = (-\sqrt{3}+i)(1+i)^2$; *e.* $z = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$.
2. Soient $A(1-3i)$, $B(4+5i)$ et $C(-3+2i)$. Calculer AB, AC et BC.

Rappels : Détermination d'un ensemble de points

Soient A et B deux points du plan :
• L'ensemble des points M du plan tels que $AM = r (r > 0)$ est le cercle de centre **A** et de rayon r.
• L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$ $(r > 0)$ est le cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon $\sqrt{r}$.
• L'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
• L'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ $(k \neq \pm 1)$ est le cercle de diamètre $[IJ]$ avec $I = bar\{(A; 1)(B; k)\}$ et $J = bar\{(A; 1)(B; -k)\}$.
• $x^2 + bx = \left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$.
• $x^2 - bx = \left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

☞**Exercice d'application 11.2.3** *Soient $A(2i)$, $B(-3-i)$ et $C(1+i)$.*
Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que :
a. $|z-2i| = 3$; *b.* $|z-1-i| = |z+3+i|$; *c.* $|\bar{z}-i+1| = 1$; *d.* $|iz+2| = 4$
(M ?thode g ?om ?trique et m ?thode analytique)

☞**Exercice d'application 11.2.4**
Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives $1+i$ et $3-2i$.
Soit f l'application du plan qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(Z)$ tels que $Z = \dfrac{z-1-i}{z-3+2i}$.
1. On pose $Z = X+iY$ et $z = x+iy$.
a. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
b. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
• *Z soit un nombre réel ;* • *Z soit un nombre imaginaire.*
2. a . Interpréter géométriquement le module de Z.
b. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
• $|Z| = 1$; • $|Z| = 2$

11.2.2 Argument d'un nombre complexe

Quelques rappels sur la trigonométrie

Angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Systèmes d'équations trigonométriques

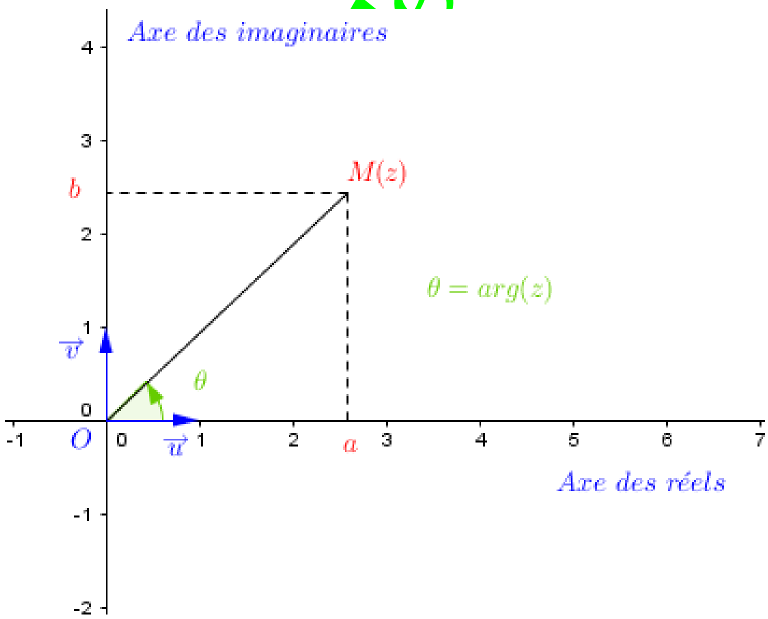
a. $\begin{cases}\cos x = \cos\alpha \\ \sin x = \sin\alpha\end{cases} \Rightarrow x = \alpha[2\pi]$; b. $\begin{cases}\cos x = \cos\alpha \\ \sin x = -\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow x = -\alpha[2\pi]$

c. $\begin{cases}\cos x = -\cos\alpha \\ \sin x = \sin\alpha\end{cases} \Rightarrow x = \pi - \alpha[2\pi]$; d. $\begin{cases}\cos x = -\cos\alpha \\ \sin x = -\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow x = \pi + \alpha[2\pi]$

☞ **Exemple 11.2.2** *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :*

a. $\begin{cases}\cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ *; b.* $\begin{cases}\cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ *c.* $\begin{cases}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ *; d.* $\begin{cases}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{cases}$

Définition 11.2.2 *Le plan complexe est muni d'un ROND $(\vec{u}, \vec{v})$. Soit M le point d'affixe $z (z \neq 0)$.*
On appelle argument de z noté $arg(z)$, toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
On a : $arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$



Détermination d'un argument *: Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $\theta = arg(z)$.*

Le triangle OIM est rectangle en I, on a alors : $\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{OI}{OM} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\Re e(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{IM}{OM} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\Im m(z)}{|z|}\end{cases}$

On a alors : $\boxed{\theta = arg(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\Re e(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{\Im m(z)}{|z|} \end{cases}}$

☞ **Exemple 11.2.3** *Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants :*
a. $z = \sqrt{3} + i$; *b.* $z = -1 + i$; *c.* $z = 1 - i\sqrt{3}$; *d.* $z = -1 - i$

Propriété 11.2.2 *Soient z et z' deux nombres complexes. On a :*

- $arg(\bar{z}) = -arg(z)[2\pi]$; • $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -arg(z)[2\pi]$;
- $arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$; • $arg(z^n) = narg(z)[2\pi]$;
- $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')[2\pi]$
- $arg(ib) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & si \quad b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & si \quad b < 0 \end{cases}$; • $arg(a) = \begin{cases} 0 & si \quad a > 0 \\ \pi & si \quad a < 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$

NB :

- Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments.
- Un nombre complexe nul n'a d'argument.
- Si $\theta = arg(z)$, l'ensemble des arguments de z est sous la forme $\theta + 2k\pi$, $\in \mathbb{Z}$

☞ **Exemple 11.2.4** *Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants :*
a. $z = 1 + i$; *b.* $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *c.* $z = -\sqrt{3} + i$; *d.* $z = (-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4$;
e. $z = \dfrac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}$; *f.* $z = \dfrac{1}{2}i$; *g.* $z = -5$

Interprétation géométrique de l'argument

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $M(z)$ $(M \neq O)$ quatre points du plan. On a :

- $arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$; • $arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$;
- $arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$; • $arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$

☞**Exercice d'application 11.2.5** *Soient $A(-1)$, $B(3 - 2i)$, $C(1 + 4i)$ et $M(z)$.*
On pose $Z_1 = \dfrac{z - 3 + 2i}{z - 1 - 4i}$; *et* $Z_2 = \dfrac{2iz - 6i + 1}{3z - 3 - 12i}$.

1. *Déterminer une mesure de* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. *Interpréter géométriquement* $arg(Z_1)$ *et* $arg(Z_2)$.

Rappels : Détermination d'un ensemble de points

Soient A et B deux points du plan :

• L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0[\pi]$ est la droite (AB) privée des points A et B.

• L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privée de A et B.

NB :
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0 \quad ou \quad arg(z) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0 \quad ou \quad arg(z) = 0[\pi]$

☞**Exercice d'application 11.2.6** *Soient $A(1)$, $B(-1)$ et $M(z)$. On pose $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$;*
1. Interpréter géométriquement $arg(Z)$.
2. En déduire l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que :
- *$Z \in i\mathbb{R}$;* • *$Z \in \mathbb{R}$*

Propriété 11.2.3 *Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan. On a :*
- *A, B et C sont alignés ssi $arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad ou \quad \pi$.*
- *$(AB) \perp (AC)$ ssi $arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$.*
- *A, B, C et D sont appartiennent à un cercle(ou sont cocycliques) ssi $\dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \times \dfrac{z_D - z_A}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$*

☞**Exercice d'application 11.2.7** *$A(-2i)$, $B(2+2i)$, $C(-2+4i)$ et $D(2)$ quatre points du plan complexe.*
1. Placer ces points.
2. Donner le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
3. En déduire la nature du triangle ABC.
4. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le rayon et le centre

11.2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe et soit θ un argument de z. On appelle Forme trigonométrique de z l'écriture de z sous la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Preuve 11.2.1 *Soit $z = a + ib$ et $\theta = arg(z)$. On a :*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\Re e(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\Im m(z)}{|z|} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z = a + ib \quad &\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

11.2.4 Forme exponentielle d'un nombre complexe

On pose $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$.
Soit z un nombre complexe et soit θ un argument de z. On appelle forme exponentielle de z, l'écriture de z sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$

☞**Exercice d'application 11.2.8** *Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*
a. $z_1 = -3 + 3i\sqrt{3}$; *b.* $z_2 = 2 - 2i$

☞**Exercice d'application 11.2.9** *Soit* $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ *et* $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
1. Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle z_1 *et* z_2.
2. Donner l'écriture algébrique de z.
3. Donner l'écriture trigonométrique de z.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$

11.2.5 Formule de Moivre et Formules d'Euler

Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :
$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

☞ **Exemple 11.2.5**
1. Calculer $(1+i)^{2016}$.
2. Exprimer $\cos 3x$ *et* $\sin 3x$ *en fonction de* $\cos x$ *et* $\sin x$.

Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
$\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

Cas général :
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :
$\boxed{\cos(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$

Propriété 11.2.4 $\forall\theta \in \mathbb{R}$ *et* $\forall\theta' \in \mathbb{R}$, *on a :*
• $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; • $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; • $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; • $e^0 = 1$

☞**Exercice d'application 11.2.10** *Linéariser* $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\cos^4 x$, $\sin^4 x$.

NB : Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ c'est exprimer $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ en une somme de $\cos px$ et $\sin qx$.

11.3 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

11.3.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = Z$.
Lorsque $\delta = x + iy$, on a :

$$\delta^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Preuve 11.3.1 *Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de $Z = a + ib$. On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = Z \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta^2 = Z \\ |\delta|^2 = |Z| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \end{aligned}$$

☞ **Exemple 11.3.1** *Déterminer les racines carrées du nombre complexe $5 - 12i$.*
Soit $\delta = x + iy$ une racine de $5 - 12i$ donc $\delta^2 = 5 - 12i$. On a alors :

$$\delta^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 13 \quad (2) \\ xy = -6 \quad (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \quad ou \quad x = -3$
$(2) + (1) \Longrightarrow 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \quad ou \quad x = -2$.
Comme $xy = -6 < 0$ donc x et y sont de signes contraires.
Par suite $x = 3$ et $y = -2$ ou $x = -3$ et $y = 2$.
Par conséquent les racines carrées de $5 - 12i$ sont : $\delta = 3 - 2i$ et $\delta = -3 + 2i$

☞**Exercice d'application 11.3.1** *Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\Delta = -2 + 2i\sqrt{3}$.*

11.3.2 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition 11.3.1 *Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ est une équation pouvant s'écrire sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c sont des nombres complexes et $a \neq 0$.*

☞ **Exemple 11.3.2** $(1 + 2i)z^2 - 4z + 3 + i = 0$; $z^2 + z + 2 = 0$

Méthode de résolution

Soit (E) : $az^2 + bz + c = 0$ équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Pour résoudre (E), on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

• 1^e Cas : $\Delta \in \mathbb{R}$:

♣ Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux racines distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

♣ Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une racine double : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$

♣ Si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux racines complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

• 2^e Cas : $\Delta \in \mathbb{C}$ et $\Delta \notin \mathbb{R}$ $(\Delta = a + ib)$: On cherche une racine carrée de Δ.
Soit $\delta = x + iy \;/\; \delta^2 = \Delta$.

alors (E) admet deux racines distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

☞ **Exemple 11.3.3** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*
a. $z^2 + 2z + 2 = 0$ *; b.* $-z^2 + (4+3i)z + 14 - 2i = 0$ *; c.* $z^2 - (5 - i\sqrt{3})z + 6 - 3i\sqrt{3} = 0$

11.3.3 Exemples de factorisation de polynôme dans $\mathbb{C}$

☞ **Exemple 11.3.4** *On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :*
$(E) : z^3 + (-6 - 4i)z + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0.$
1. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pur z_0 que l'on déterminera.
2. Résoudre (E).

☞ **Exemple 11.3.5** *On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :*
$z^3 - (3 + 2i)z + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0.$
1. Déterminer la solution réelle de l'équation.
2. Résoudre l'équation.

11.4 Racine n-*ième* d'un nombre complexe

11.5 Racine n-*ième* de l'unité

Définition 11.5.1 *Soit n un entier naturel non nul. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.*
Détermination des racines n-ième de l'unité
Soit $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$; $z^n = 1$. Cherchons les solutions sous forme exponentielle.

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ arg(z^n) = arg(1) = 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ narg(z) = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ arg(z) = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Alors $\boxed{z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}}$

Propriété 11.5.1

- $z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- *Pour trouver toutes les racines n-ième de l'unité, on prend $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*
- *On a exactement n racines n-ième de l'unité.*

☞ **Exemple 11.5.1** *Déterminer les racines cubiques et les racines quatrièmes de l'unité.*

Remarque 11.5.1 *Si $n \geq 0$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.*

Preuve 11.5.1 *On a :*

$$
\begin{aligned}
z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n &= e^0 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \ldots + e^{2i\pi} \\
&= 1 + \left[e^{i\frac{2\pi}{n}}\right] + \left[e^{i\frac{2\pi}{n}}\right]^2 + \ldots + \left[e^{i\frac{2\pi}{n}}\right]^n \\
&= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 - \cos 2\pi - i \sin 2\pi}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 - 1 - 0}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

11.6 Racine n-*ième* d'un nombre complexe

Définition 11.6.1 *Soit n un entier naturel non nul et Z un nombre complexe. On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.*
Détermination des racines n-ième de Z
Soit $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$; $z^n = Z$. Cherchons les solutions sous forme exponentielle.
Soit $\alpha = arg(Z)$. On a :

$$
\begin{aligned}
z^n = Z \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z^n| = |Z| \\ arg(z^n) = arg(Z) + 2k\pi \end{cases} \quad , k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z|^n = |Z| \\ narg(z) = arg(Z) + 2k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z|^n = |Z| \\ narg(z) = \alpha + 2k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ arg(z) = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Alors $\boxed{z = \sqrt[n]{|Z|} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}}$

Propriété 11.6.1

- $z^n = Z \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- *Pour trouver toutes les racines n-ième de Z, on prend $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*
- *On a exactement n racines n-ième de Z.*

☞ **Exemple 11.6.1**
1. Déterminer les racines cubiques de $Z = 2 - 2i$.
2. Déterminer sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique) les racines carrées de $Z = -8\sqrt{3} + 8i$.

11.6.1 Détermination des racines racines n-*ième* de Z connaissant une racine z_0

Soit $(E) : z^n = Z$ et z_0 une solution de (E).
On a alors :

$$\begin{cases} z^n = Z \\ z_0 = Z \end{cases} \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow z = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Propriété 11.6.2 *Si on connait une racine n-ième z_0 de Z, alors toutes les autres racines n-ième de Z sont de la forme :* $\boxed{z = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$, $k = 0, 1, \ldots n-1$

☞**Exercice d'application 11.6.1** *(BAC 2005 S2) Soit $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$*
1. Montrer que $z_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ est une solution de (E).
2. En déduire les autres solutions de (E).
3. Déterminer la forme algébrique et la forme trionométrique, les solutions de (E).
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

11.7 Complément : Nature d'un triangle

- ABC est un triangle isocèle en $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ et \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ et \\ arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \theta \neq \pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

- ABC est un triangle rectangle isocèle en $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ et \\ \widehat{A} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ et \\ arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

- ABC est un triangle équilatèral $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC = BC \\ et \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ et \\ arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

• ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB \neq AC \\ \quad et \\ \widehat{A} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| \neq 1 \\ \quad et \\ arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

☞**Exercice d'application 11.7.1** *(BAC 2007 S2)*
On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E) : $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0$.
1. a. Déterminer la solution réelle de (E).
b. Montrer que i est une solution de (E).
c. Déterminer la troisième solution de (E).
2. Soient les points A, B et C d'affixes repectives 1, i et $2+i$.
a. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
b. En déduire la nature du triangle ABC.

2 CHAPITRE

12 Les Transformations du plan : Similitudes directes planes

12.1 Généralités

Définition 12.1.1
On appelle transformation du plan $\mathcal{P}$, toute bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.
Soit f une transformation du plan $\mathcal{P}$ qui, à tout point $M(z)$ du plan, associe le point $M'(z')$. On a : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$

- *M' est le point image de M par f.*
- *M est le point antécédent de M' par f.*
- *$f(M) = M' \Leftrightarrow f(z) = z'$.*

Cas particulier *Idp : Idéntité du plan :*

$\forall M \in \mathcal{P}, \quad Idp(M) = M$

☞ **Exemple 12.1.1** *La translation, l'homothétie et la rotation sont des transformations du plan.*

Définition 12.1.2 (Point invariant par f)
On appelle point invariant d'une transformation f tout point point qui est son propre image.

$M(z)$ *est invariant par* $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow z' = z$

12.2 Similitudes directes

12.2.1 Translations

Définition 12.2.1
On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$), la transformation du plan $\mathcal{P}$, notée $t_{\overrightarrow{u}}$, qui , à tout point M associe le point M' tel que : $t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

Remarque 12.2.1

- *Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $t_{\overrightarrow{u}} = Idp$*
- $t_{-\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}}$
- $t_{\overrightarrow{u} o \overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$
- *Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $t_{\overrightarrow{u}}$ n'admet pas de point invariant.*

Ecriture complexe

Soient $M(z)$ et $M'(z'$ deux points du plan et $\overrightarrow{u}(b)$ un vecteur. On a :
$t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow z' = z + b$.
$\boxed{z' = z + b}$ est l'écriture complexe la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.

NB : Soit $f(M) = M' / \ z' = az + b$.
Si $a = 1$ alors f d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.

☞ **Exemple 12.2.1**
1. Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $3i$.
2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = z + 2 - 2i$. Déterminer la nature et les éléments caractéistiques de f.

12.2.2 Homothétie

Définition 12.2.2
On appelle Homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$), la transformation du plan $\mathcal{P}$, notée $h(\Omega, k)$, qui , à tout point M associe le point M' tel que :
$h(\Omega, k)(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Remarque 12.2.2

- *Si $k = 1$ alors $h(\Omega, 1) = Idp$*
- *Si $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors $h^{-1}(\Omega, k) = h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$*
- *$h(\Omega, k)oh'(\Omega, k') = h''(\Omega, kk')$.*
- *$h(\Omega, k)$ a un seul point invariant qui est son centre Ω.*

Ecriture complexe

Soient $M(z)$, $M'(z'$ et $\Omega(\omega)$ trois points du plan . On a :
$h(\Omega, k)(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow z' = k(z - \omega) + \omega$.
$\boxed{z' = kz + (1 - k)\omega}$ est l'écriture complexe d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k.

Remarque 12.2.3 *$z' = kz + (1 - k)\omega$.*
Posons $a = k$ et $b = (1 - k)\omega = (1 - a)\omega$. On a alors $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

NB : Soit $f(M) = M' / \ z' = az + b$.
Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors f est une homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$ et de rapport $k = a$.
.

☞ **Exemple 12.2.2**
1. Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = 2i + 2$ et de rapport $k = 3$.
2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = 2z - 5 + 2i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

12.2.3 Rotation

Définition 12.2.3
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ, la transformation du plan $\mathcal{P}$, notée $r(\Omega,\theta)$, qui , à tout point M associe le point M' tel que :

$$r(\Omega,\theta)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases}$$

Remarque 12.2.4

- *Si $\theta = 0$ alors $r(\Omega,\theta) = Idp$*
- *Si $\theta \neq 0$ alors $r^{-1}(\Omega,\theta) = r(\Omega,-\theta)$*
- *$r(\Omega,\theta)or(\Omega,\theta) = r(\Omega,\theta+\theta')$*
- *$r(\Omega,\theta)$ a un seul point invariant qui est son centre Ω.*

Ecriture complexe

Soient $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$ trois points du plan . On a :

$$\begin{aligned} r(\Omega,\theta)(M) = M \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow \quad z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega) \\ &\Leftrightarrow \quad z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{aligned}$$

$\boxed{z' = e^{i\theta}z + (1-e^{i\theta})\omega}$ est l'écriture complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.

Remarque 12.2.5 *$z' = e^{i\theta}z + (1-e^{i\theta})\omega$.*
Posons $a = e^{i\theta}$ et $b = (1-e^{i\theta})\omega = (1-a)\omega$. On a alors $z' = az+b$ avec $a \notin \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$

NB : Soit $f(M) = M'/\ z' = az+b$.
Si $a \notin \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$ alors f est une rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = arg(a)$.
.

☞ **Exemple 12.2.3**
1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = 2i$ et d'angle

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = iz + 2 - 2i$. Déterminer la nature et les éléments caractéistiques de f.

12.2.4 Similitudes directes

Définition 12.2.4

On appelle similitude directe de centre Ω, de rapport k (avec $k > 0$) et d'angle θ, la transformation du plan $\mathcal{P}$, notée $s(\Omega, k, \theta)$, qui , à tout point M associe le point M' tel que :

$$s(\Omega, k, \theta)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases}$$

Remarque 12.2.6

- *Si $\theta = 0$ alors $(\Omega, k, \theta) = Idp$*
- *Si $\theta \neq 0$ alors $s^{-1}(\Omega, k, \theta) = s\left(\Omega, \dfrac{1}{k}, -\theta\right)$*
- *$s(\Omega, k, \theta)os(\Omega, k', \theta') = s(\Omega, kk', \theta + \theta')$*
- *$s(\Omega, k, \theta)$ a un seul point invariant qui est son centre Ω.*

Ecriture complexe

Soient $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$ trois points du plan . On a :

$$\begin{aligned} s(\Omega, k, \theta)(M) = M \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = k \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = k \\ arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = ke^{i\theta} \\ & \Leftrightarrow z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \\ & \Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$

$\boxed{z' = ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})\omega}$ est l'écriture complexe d'une similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle θ.

Remarque 12.2.7 *$z' = ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})\omega$.*
Posons $a = ke^{i\theta}$ et $b = (1 - ke^{i\theta})\omega = (1 - a)\omega$. On a alors $z' = az + b$ avec $a \notin \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$

NB : Soit $f(M) = M' / z' = az + b$.
Si $a \notin \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = arg(a)$.

☞ **Exemple 12.2.4**
1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = 1+i$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.
2. Soit s la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = (1+i)z - 2i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Thèoréme 12.2.1 *Toute similitude directe admet une écriture complexe pouvant s'écrire sous la forme $z' = az + b$*

Détermination d'une similitude

♣ A partir de deux points et leurs images

Soient $A(z_A)$,$B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Soit s la similitude directe qui transforme A en C et B en D.
On a : $M(z)$, $M'(z')$ $/S(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b$.

$S(A) = C \Leftrightarrow z_C = az_A + b$ (1)
$S(B) = D \Leftrightarrow z_D = az_B + b$ (2)
(2)-(1)$\Rightarrow$ $z_D - z_C = a(z_B - z_A) \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}}$ et $\boxed{b = z_C - az_A}$

♣ A partir de son centre, d'un point et son image

Soient $A(z_A)$,$B(z_B)$, $C(z_C)$ trois points du plan . Soit s la similitude directe qui laisse invariant A (de centre A) et transforme B en C.
On a : $M(z)$, $M'(z')$ $/S(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b$.

$S(A) = A \Leftrightarrow z_A = az_A + b$ (1)
$S(B) = C \Leftrightarrow z_C = az_B + b$ (2)
(2)-(1)$\Rightarrow$ $z_C - z_A = a(z_B - z_A) \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}}$ et $\boxed{b = (1-a)z_A}$

☞ **Exemple 12.2.5** *Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = -2+i$ et $z_C = i$. Déterminer les éléments caractéristique de la similitude directe s qui laisse invariant A et transforme B en C.*

♣ A partir de son expression analytique

Pour d ?terminer l' ?criture complexe d'une application du plan dans lui-m ?me d'expression analytique donn ?e, on peut proc ?der de la mani ?re suivante :
- Ecrire $z' = x' + iy'$ et remplacer x' et y' en fonction de x et y.
- Remplacer x par $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et y par $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ et développer l'expression obtenue en fonction de z et $\bar{z}$.

☞ **Exemple 12.2.6** *Soit s l'application du plan dans lui-m ?me d'expression analytique :* $\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$

1. Déterminer l'écriture complexe de s.

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de s.

12.3 Image d'une configuration par une similitude directe

Soit s une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. On a :

Transformation	Similitude s
Droite (AB)	$(A'B') = s[(AB)]$ $A' = s(A)$ $B' = s(B)$
Cercle $\mathcal{C}(I, r)$	$s(C) = C'(I', r')$ $I' = s(I)$ $r' = \|k\|r$

☞**Exercice d'application 12.3.1** *Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ du plan associe $M'(z')$ tel que : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$.*

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Déterminer une écriture analytique de f.

3) Déterminer une équation de l'image D' de la droite $D : y = x + 3$ par f.

4) Déterminer une équation de l'image C' du cercle C de centre I d'affixe $z_I = i$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

☞***Corrigé***

1) Déterminons les éléments caractéristiques de f.

$z' = (1+i)z - 2 + 2i$

$|1+i| = \sqrt{2} \neq 1$ *donc f est une similitude directe plane.*

$$\theta = arg(1+i) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}[2\pi].$$

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-2+2i}{1-1-i} = \frac{-2+2i}{-i} = -2-2i.$$

f est une similitude directe plane de centre Ω d'affixe $\omega = -2-2i$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. $\boxed{f = S(\Omega, 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})}$.

2) Déterminons une écriture analytique de f.

$M(z)$; $M'(z')$ $f(M) = M'$.

$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = (1+i)z - 2 + 2i$. Soit $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$.

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (1+i)(x+iy) - 2 + 2i \\ &= x + iy + ix - y - 2 + 2i \\ &= (x - y - 2) + i(x + y + 2) \end{aligned}$$

Par identification $\boxed{\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}}$

3) Déterminons une équation de l'image D' de la droite $D : y = x + 3$ par f.
$M(z)$, $M'(z')$. $M \in D$, $S(M) = M' \in D'$.

On a $\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$

Donc $x' + y' = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{x' + y'}{2}$ *et* $y' - x' = 2y + 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{-x' + y' + 4}{2}$.

Alors

$$y = x + 3 \Leftrightarrow \frac{-x' + y' + 4}{2} = \frac{x' + y'}{2} + 3 \Leftrightarrow x' = -5$$

D'où $\boxed{D' : x' = -5}$.

Autre méthode
On prend deux points A et B de la droite D puis on détermine leurs images par f, notées repectivement A' et B'. En fin on détermine une équation de la droite $(A'B')$ qui est la droite D' cherchée.
$D : y = x + 3$

	A	B
x	*0*	*3*
y	*3*	*0*

Le point A a pour affixe $z_A = 3i$ et B a pour affixe $z_B = -3$.

$$\begin{aligned} S(A) = A' &\Leftrightarrow z_{A'} = (1+i)z_A - 2 + 2i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = (1+i)(3i) - 2 + 2i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = -5 + 5i \\ S(B) = B' &\Leftrightarrow z_{B'} = (1+i)z_B - 2 + 2i \\ &\Leftrightarrow z_{B'} = (1+i)(-3) - 2 + 2i \\ &\Leftrightarrow z_{B'} = -5 - i \end{aligned}$$

On a : $f[(D)] = f[(AB)] = (A'B')$ *avec* $A'(-5; 5)$ *et* $A'(-5; -1)$.
$M'(x'; y') \in (A'B') \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{A'B'}$. *Or* $\overrightarrow{A'M}(x - 5; y - 5)$; $\overrightarrow{A'B'}(0; 6)$.
Alors $\overrightarrow{A'M}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow -6(x + 5) - 0(y - 5) = 0$ *ou encore* $x = -5$.
D'où $\boxed{D' : x = -5}$.
4) Déterminons une équation de l'image C' du cercle C de centre I d'affixe $z_I = i$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
f est une similitude de centre $\Omega(2 - 2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
$f[C(I, 2\sqrt{2})] = C'(I', r')$ *avec* $r' = k \times r = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ *et* $I' = f(I)$

donc $z_{I'} = (1+i)z_I - 2 + 2i = -3 + 3i$.
C' *est le cercle de centre* $I'(-3+3i)$ *et de rayon* 4. *Donc on a :*
$\boxed{C' : (x+3)^2 + (y-3)^2 = 4^2 = 16}$.

☞**Exercice d'application 12.3.2** *Soit* f *une transformation du plan qui, à tout point* $M(x;y)$ *du plan associe* $M'(x';y')$ *telle que :*

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} \\ y' = \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Déterminer une écriture complexe de f.
2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.
☞***Résolution***
1) Déterminons une écriture complexe de f.
$M(x;y)$, $M(z)/z = x + iy$ *et* $M'(x';y')$, $M'(z')/z' = x' + iy'$

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} + i(\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}) \\ &= x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} + i\sqrt{3}x + iy + i\sqrt{3} \\ &= (1+i\sqrt{3})x + (-\sqrt{3}+i)y + 3\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= (1+i\sqrt{3})x + (i^2\sqrt{3}+i)y + 3\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= (1+i\sqrt{3})x + i(1+i\sqrt{3})y + 3\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= (1+i\sqrt{3})(x+iy) + 3\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= (1+i\sqrt{3})z + 3\sqrt{3} - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f : z' = (1+i\sqrt{3})z + 3\sqrt{3} - i\sqrt{3}}$.
2) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de f.

$1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$, $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \neq 1$ *donc* f *est une similitude directe plane*

$$\theta = arg(1+i\sqrt{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

$\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{3\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = \dfrac{-2+2i}{-i} = -1 + 3i.$
f *est une similitude directe plane de centre* Ω *d'affixe* $\omega = -1+3i$, *de rapport* 2 *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$. $\boxed{f = S(\Omega; 2; \dfrac{\pi}{3})}$.

☞**Exercice d'application 12.3.3** *Soit* f *une transformation du plan qui, à tout point* $M(z)$ *du plan associe* $M'(z')$ *telle que :* $z' = \dfrac{1+i}{2}z$ *et* O *origine du repère.*
Montrer que OMM' *est un triangle rectangle isocèle en* M'.
☞***Résolution***

Montrons que OMM' *est un triangle rectangle isocèle en* M'.

$$\frac{z-z'}{z_0-z'} = \frac{z-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)z}{-\dfrac{1+i}{2}z} = \frac{\left(1-\dfrac{1+i}{2}\right)z}{-\dfrac{1+i}{2}z} = \frac{1-i}{-1-i} = i$$

$$\left|\frac{z-z'}{z_0-z'}\right| = |i| = 1 \Longrightarrow \frac{MM'}{M'O} = 1 \Longrightarrow MM' = M'O$$

$$arg\left(\frac{z-z'}{z_0-z'}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} MM' = M'O \\ (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } OMM' \text{ est un triangle rectangle isocèle en } M'.$$

☞**Exercice d'application 12.3.4**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E) : (1-i)z^2 + 2(1+2i)z + \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$.

2. Soit z_0 *la solution de* (E) *dont la partie réelle est égale à la partie imaginaire,* z_1 *l'autre solution.* M_0 *et* M_1 *désignent leurs images respectives dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. *On considère la similitude plane directe* s *de centre* O, *de rapport* $\sqrt{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{6}$. *Soit* $M_n(z_n)$ *l'image de* $M_{n-1}(z_{n-1})$ *par* s.

a) Exprimer z_n *en fonction de* z_{n-1}.

b) Soit r_n *et* θ_n *le module et l'argument de* z_n. *Montrer que la suite* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique et que que la suite* $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique. On précisera la raison et le premier terme de chaque suite.*

c) Exprimer r_n *et* θ_n *en fonction de* n.

☞**Exercice d'application 12.3.5**

Soit S *la transformation du plan complexe muni d'un repère orthonormé, d'écriture complexe :* $z' = (1+i)z + 2i$. A *le point d'affixe* -2 *et* B *celui d'affixe* -1.

<u>Partie A</u>

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

2. Déterminer l'affixe du point C *l'image du point* B *par la transformation* S.

3. En déduire la nature du triangle ABC.

<u>Partie B</u>

Soit la suite (z_n) *définie par* $\begin{cases} z_0 = -1 \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$

1. Calculer z_1 *et* z_2.

2. On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_n = z_n + 2$.

a) Montrer que la suite suite (u_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*

b) En déduire une expression de z_n *en fonction de* n.

3. Soit M_n *le point d'affixe* z_n.

a) Construire les points M_n *pour* n *variant de* 0 *à* 8.

b) Pour quelles valeurs de n *les points* M_n *sont-ils à l'intérieur du cercle de centre* A *et de rayon* 5.

c) Démontrer que $\dfrac{z_{n+1}+2}{z_n+2} = 1+i$ *et en déduire la nature du triangle* AM_nM_{n+1}

☞**Exercice d'application 12.3.6** *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*. On prendra pour unité graphique 5 cm.*
On pose M_0 *le point d'affixe* $z_0 = 2$ *et* $\forall n \geq 1$, $M_{n+1}(z_{n+1})$ *l'image du point* $M_n(z_n)$ *par la similitude directe* s *de centre* O*, d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *et de rapport* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. a) Exprimer z_{n+1} *en fonction de* z_n.

b) Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 *et vérifier que* z_4 *est un nombre réel.*

c) Placer les points M_0 ,M_1, M_2, M_3 *et* M_4 *sur une figure.*

2. Pour tout entier naturel n*, on pose* $u_n = |z_n|$.

a) Justifier que u_n *est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*

b) Exprimer u_n *en fonction de* n.

c) A partir de quel rang n_0 *tous les points* M_n *appartiennent-ils au disque de centre* O *et de*
rayon $0,1$ *?*

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

b) En déduire la nature du triangle OM_nM_{n+1}.

4. Pour tout entier naturel n*, on pose* l_n *la longueur du ligne brisée* $M_0M_1M_2 \dots M_n$*. On a ainsi* $l_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots M_nM_{n+1}$.

a) Exprimer l_n *en fonction de* n.

b) Déterminer alors la limite de la suite (l_n).

Inspection Académique de Saint-Louis **Année Scolaire 2016-2017**
Lycée de Dioudé Diabé **Classe :** TS_2
Prof : M.Djitté

Série n^{o}2 : Nombres Complexes & Similitudes planes directes

☞**Exercice 1**
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$; $z_2 = \dfrac{i-3}{-1-2i}$;

$z_3 = (z+2)(2z-i)$; $z_4 = \dfrac{z+1-i}{z-2}$.

(On posera $z = x + iy$ pour z_3 et z_4)

☞**Exercice 2**
Dans chacun des cas ci-dessous déterminer le module et un argument de z, puis donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle :

a) $z = -\sqrt{3} + i$; b) $z = 1 + i$;

c) $z = 2(-\sqrt{3} + i)^4$; d) $z = 2(-\sqrt{3} + i)(1+i)^2$

e) $z = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$; f) $z = -\sin\alpha + i\cos\alpha$

g) $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi]$

h) $z = \dfrac{1 - \cos\theta - i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$

☞**Exercice 3**
On pose $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.
1. Donner la forme trigonométrique de z.
2. Donner la forme algébrique de z.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

☞**Exercice 4**
Soit z un nombre complexe tel que $z \neq -3i$. On considère le nombre complexe Z définie par

$Z = \dfrac{2iz-1}{3-iz}$. Soit A le point d'affixe $-3i$.

Déterminer analytiquement puis géométriquement l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) $|Z| = 2$; b) $|Z| = 4$.

☞**Exercice 5**
Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$. On considère le nombre complexe Z définie par

$Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Soient $M(z)$, $M'(Z)$, $A(1)$ et $B(-1)$.
1. Interpréter géométriquement un argument de Z.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : a) $z \in \mathbb{R}$; b) $z \in i\mathbb{R}$.

☞**Exercice 6**
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$-z^3 + (4+i)z^2 + (8+6i)z + 4 + 28i = 0$.

1. Montrons que cette équation admet une solution imaginaire pure que l'on notera α.
2. Déterminer les autres solutions β et γ.
3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives α, β et γ.

a. Placer les points A, B et C.

b. Calculer $\dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

☞**Exercice 7**
Soit $z = -8\sqrt{3} + 8i$; $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
1. Calculer le module et un argument de z.
2. Déterminer sous forme trigonométrique, les racines carrées de z.
3. Calculer u^2. Exprimer les racines carrées de z sous forme algébrique.
4. En déduire la valeur exacte de $cos\dfrac{5\pi}{6}$ et $sin\dfrac{5\pi}{6}$ ☞**Exercice 8**

1. Considérons l'équation $(E) : z^2+3\sqrt{3}z+9=0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).(on notera z_1 et z_2 ses solutions).

b) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et de z_2.

2. Soit P le polynôme complexe défini par $P(z)=z^3-3(i+\sqrt{3})z^2+9(1+i\sqrt{3})z-27i$.

a) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une unique racine imaginaire pure.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z)=(z-3i)(az^2+bz+c)$.

c) En déduire toutes les solutions de l'équation $P(z)=0$.

3. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=3i$; $z_B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$ et $z_C=\bar{z_B}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité 2cm)

a) Placer les points A, B et C sur la figure.

b) Ecrire $q=\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ sous forme algébrique.

c) Déterminer le module et un argument de q.

d) En déduire la nature du triangle ABC.

☞**Exercice 9**

1. Montrer que $(-1+i)^3=2+2i$.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^3=1$. (on donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique)

b) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^3=2+2i$.

On remarquera que (E) est équivalente à $\left(\dfrac{z}{-1+i}\right)^3=1$.

3. a) Ecrire $-1+i$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire des arguments des solutions de (E).

4. Déduire des questions 2.b) et 3.b) les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

☞**Exercice 10**

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation

$(E) : z^3-4iz^2+4iz-24i-8=0$.

1. Montrer (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera z_0.

2. Trouver les autres solutions z_1 et z_2 de (E).

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{u})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=-2i$; $b=2+2i$; $c=-2+4i$ et $d=2$.

a) Calculer b^{20}.

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $q=\dfrac{b-a}{b-c}$.

En déduire la nature du triangle ABC.

c) Démontrer que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

☞**Exercice 11**

On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^4=-7-24i$.

1. Vérifier que $z_0=2-i$ est une solution de (E)

2. Résoudre l'équation (E).

☞**Exercice 12**

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe vérifiant :

a) f a pour rapport $k=2$; angle $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ et transforme A en B avec $z_A=\sqrt{2}$ et $z_B=4+i\sqrt{2}$.

b) f a pour centre $I(1+i)$ de rapport $k=3$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe f du plan telle que $f(A)=B$ et $f(C)=D$

a) $z_A=i$; $z_B=-4-i$; $z_C=1-i$ et $z_D=-1-2i$.

b) $z_A=3-2i$; $z_B=-3-2i$; $z_C=-3i$ et $z_D=3$.

☞**Exercice 13**

1. On considère l'équation complexe

$(E) : z^3+(3+2i)z^2+(3+5i)z+2+6i$.

a) Déterminer la solution imaginaire pure de

(E).

b) Déterminer les deux autres solutions z_1

et z_2 de (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = -2-i$ et $z_C = -1+i$. Soit s la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Donner l'écriture complexe de s.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de

s.

c) Déterminer l'image par s de la droite (D)

d'équation $y = x$.

☞**Exercice 14**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère le point A d'affixe 2.

1. Soit f l'application du plan $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer l'affixe de A' l'image de A par

f.

b) Déterminer l'affixe du point S tel que

$f(O) = S$.

c) Déterminer les éléments caractéristiques de

f.

2. Soit g la similitude directe de centre Ω d'affixe i, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.

a) Démontrer que l'écriture complexe de g est

$g : z \longmapsto z' = (1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3}$.

b) Déterminer l'affixe de A'' image de A par

gof.

c) Déterminer l'écriture complexe de gof

☞**Exercice 15**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère le point A d'affixe 2. On considère la transformation du plan $f : M(x, y) \longmapsto M'(x', y')$ définie par : $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

a) Déterminer l'ensemble des points invariant

par f.

b) Déterminer l'image des points $A(1+2i)$ et

$B(-1; 2)$.

c) Déterminer l'antécédent de $C(1+2i)$.

d) Déterminer l'image de la droite

$(D) : y = 2x + 1$.

2. Déterminer l'écriture complexe de f. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.