VISA BAC

MATHS

TERMINALE S

- Résumé du cours
- Exercices d’application corrigés
- Exercices d’entrainement
- Problèmes et sujets type Bac

VISA BAC

MATHEMATIQUES

TERMINALE S2

Auteurs

- Oumar SAGNA, inspecteur de mathématiques de l'enseignement moyen secondaire.
- Moussa FAYE, conseiller pédagogique, formateur de mathématiques.

PREFACE

Cet ouvrage est un outil destiné à vous, élèves de Terminale S2, pour vous aider à préparer les devoirs de classe, mais aussi le Baccalauréat. Il comprend :

- ✓ des résumés de cours pour servir de fiches de leçons, vous facilitant la rétention des notions fondamentales du programme.
- ✓ des exercices d'application prenant en charge les compétences exigibles du programme, et leurs corrigés pour vous apprendre à répondre à des questions types.
- ✓ des exercices d'entrainement gradués et variés, pour le renforcement de vos capacités durant l'année scolaire.
- ✓ des problèmes et des sujets de Baccalauréat, pour vous permettre de jauger votre niveau par rapport à ce qui vous attend à l'examen.

Il ne fait aucun doute, que cet ouvrage, bien utilisé, contribuera grandement à votre réussite au Baccalauréat.

Nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, critiques et suggestions qui nous permettront de l'améliorer.

Nous remercions M. Youga Mbengue inspecteur de

Mathématiques de l'enseignement moyen secondaire et tous nos collègues enseignants pour leurs contributions.

Nous dédions cet ouvrage à nos familles bien-aimées.

Les auteurs

SOMMAIRE

Chapitre 0: RAPPELS

Le second degré

Soit a b, c des réels ($a \neq 0$), f un trinôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant :

- **Factorisation et équation**

- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme f peut être factorisé et sa forme

factorisée est $a(x-x_1)(x-x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions que sont les réels x_1 et x_2.

- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme f peut être factorisé et sa forme

Factorisée est $a(x-x_0)(x-x_0) = a(x-x_0)^2$ où $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution: le réel x_0.

- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme f ne peut pas être factorisé et

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

- **Signe d'un trinôme**

- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme f est du signe de « a » à

l'extérieur des racines et du signe de « - a » à l'intérieur des racines.

En supposant que $x_1 < x_2$, on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de $\boldsymbol{a}$	0	signe de $-\boldsymbol{a}$	0	signe de $\boldsymbol{a}$

- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme f est du signe de « a », sauf en x_0 où il s'annule.

x	$-\infty$ $\qquad$ x_0 $\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de $\boldsymbol{a}$ $\quad$ 0 $\quad$ signe de $\boldsymbol{a}$

- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme f est partout du signe de « a »

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de $\boldsymbol{a}$

<u>Remarque :</u>

Pour résoudre une inéquation du second degré, on peut établir le tableau de signe du trinôme associé à l'inéquation et lire les solutions sur le tableau.

<u>Factorisation d'un polynôme</u>

Soit P un polynôme et a un nombre réel.

- a est une racine de P ssi $P(a) = 0$
- Si a est une racine de P alors il existe un polynôme

Q tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$ où $\deg Q = \deg P - 1$

<u>Remarque</u>

On peut utiliser la méthode de Horner pour déterminer Q dans le cas où P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 3..

<u>Equations et inéquations avec valeur absolue</u>

- $|f(x)| = |g(x)|$ ssi $f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$
- $|f(x)| = g(x)$ ssi $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \text{ ou } f(x) = -g(x) \end{cases}$
- Si a un réel positif ou nul

- $|f(x)| = a$ ssi $f(x) = a$ ou $f(x) = -a$.
- $|f(x)| \leq a$ ssi $-a \leq f(x) \leq a$.
- $|f(x)| \geq a$ ssi $f(x) \geq a$ ou $f(x) \leq -a$.

- Si a est un réel strictement négatif
  - $|f(x)| = a$ l'égalité est impossible ; l'ensemble des solutions $S = \phi$.
  - $|f(x)| < a$ l'inégalité est impossible ; l'ensemble des solutions $S = \phi$.
  - $|f(x)| \geq a$ l'inégalité est toujours vraie ; l'ensemble des solutions $S = \mathbb{R} \cap D_f$ où D_f est l'ensemble de définition de f.

<u>Rappel</u>

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) si\, f(x) \geq 0 \\ -f(x)\; si\; f(x) \leq 0 \end{cases}$$

<u>Equations et inéquations irrationnelles</u>

- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ ssi $\begin{cases} f(x) \geq 0\ (ou\ g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ssi $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$.
- $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ ssi $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$.
- $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ ssi $\begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$.

<u>Fonction partie entière</u>

- **Définition**

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On appelle fonction partie entière la fonction notée E définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = k$, $\forall x \in [k\,;\,k+1[$.

- **Propriété**

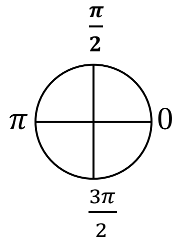
$\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < E(x) \leq x.$

Trigonométrie

➢ **Valeurs remarquables :**

- **de k$\frac{\pi}{2}$**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$sinx$	0	1	0	-1
$cosx$	1	0	-1	0

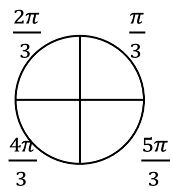


Remarque

- Si $\alpha \in [0\ ; \frac{\pi}{2}]$, $cos\alpha$ et $sin\alpha$ sont positifs
- Si $\alpha \in [\frac{\pi}{2}\ ; \pi]$, $cos\alpha$ est négatif et $sin\alpha$ est positif
- Si $\alpha \in [\pi\ ; \frac{3\pi}{2}]$, $cos\alpha$ et $sin\alpha$ sont négatifs
- Si $\alpha \in [\frac{3\pi}{2}\ ; 2\pi]$, $cos\alpha$ est positif et $sin\alpha$ est négatif

- **des multiples irréductibles de $\frac{\pi}{3}$**

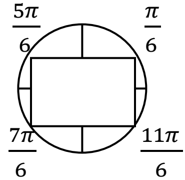
Les multiples irréductibles de $\frac{\pi}{3}$ ($\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \ldots$) ont pour *cosinus* $\pm\frac{1}{2}$ et pour *sinus* $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Selon que le multiple est dans $[0\ ; \frac{\pi}{2}]$, dans $[\frac{\pi}{2}\ ; \pi]$, dans $[\pi\ ; \frac{3\pi}{2}]$ ou dans $[\frac{3\pi}{2}\ ; 2\pi]$, on détermine la valeur du *cosinus* et du *sinus* de ce multiple en appliquant la remarque ci-dessus.

- **des multiples irréductibles de $\frac{\pi}{6}$**

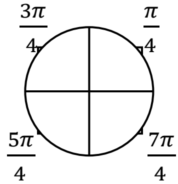
Les multiples irréductibles de $\frac{\pi}{6}$ ont pour *sinus* $\pm\frac{1}{2}$ et pour *cosinus* $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



- **des multiples irréductibles de $\frac{\pi}{4}$**

Les multiples irréductibles de $\frac{\pi}{4}$

ont pour *sinus* et pour *cosinus* $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



➢ **Cosinus et sinus d'angles associés**

$$\begin{cases} cos(-\alpha) = cos\alpha \\ sin(-\alpha) = -sin\alpha \end{cases};$$

$$\begin{cases} cos(\pi+\alpha) = -cos\alpha \\ sin(\pi+\alpha) = -sin\alpha \end{cases}; \qquad \begin{cases} cos(\pi-\alpha) = -cos\alpha \\ sin(\pi-\alpha) = sin\alpha \end{cases};$$

$$\begin{cases} cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin\alpha \\ sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cos\alpha \end{cases}; \qquad \begin{cases} cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -sin\alpha \\ sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = cos\alpha \end{cases}.$$

➢ **Formules d'addition**

- $cos(a + b) = cosacosb - sinasinb$;
- $cos(a - b) = cosacosb + sinasinb$;
- $sin(a + b) = sinacosb + sinbcosa$;
- $sin(a - b) = sinacosb - sinbcosa$;
- $cos2a = cos^2a - sin^2a$;
- $cos2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a$;
- $sin2a = 2sinacosa$;
- $sina = 2sin\frac{a}{2}cos\frac{a}{2}$;
- $cosa = 2cos^2\frac{a}{2} - 1$ d'où $1 + cosa = 2cos^2\frac{a}{2}$;
- $cosa = 1 - 2sin^2\frac{a}{2}$ d'où $1 - cosa = 2sin^2\frac{a}{2}$.

- **Equations trigonométriques**

- $cosx = cos\alpha$ ssi $x = \alpha+2k\pi$ ou $x = -\alpha+2k\pi$, $k\in \mathbb{Z}$.
- $sinx = sin\beta$ ssi $x = \beta + 2k\pi$ ou $x = \pi- \beta + 2k\pi$, $k\in \mathbb{Z}$.
- $tanx = tan\gamma$ ssi $x = \gamma + k\pi$, $k\in \mathbb{Z}$ (avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) .

- **Autres formules**

- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$.
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $-1\leq\ cos\alpha \leq 1$ et $-1\leq\ sin\alpha \leq 1$
- $\begin{cases} cos(\alpha + 2k\pi) = cos\alpha \\ sin(\alpha + 2k\pi) = sin\alpha \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}cos(x - \varphi)$ où

  $\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ (ce système permet de déterminer φ).
- tanα = $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ existe ssi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Chapitre1: LIMITE-CONTINUITE-DERIVATION

1.1. RESUME DU COURS

Dans ce chapitre, on désigne par l'infini « ∞ », + ∞ ou - ∞ et par C_f la courbe de *f* dans un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Limite d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle

- A l'infini, la limite d'un polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.
- A l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport du monôme de plus haut degré du numérateur sur celui du dénominateur.

Formes indéterminées

Dans un calcul de limite, si on obtient « $+\infty - \infty$ » ou « $0.\infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », alors on a une forme indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on fait une transformation d'écriture.

Formes indéfinies

Dans un calcul de limite d'un quotient, si on obtient « $\frac{a}{0}$ » , avec $a \neq 0$, alors on a une forme indéfinie.

Dans ce cas la limite est égale à l'infini ; pour déterminer dans quel cas on a $+\infty$ ou $-\infty$, on étudie le signe du dénominateur et on calcule les limites à gauche et à droite.

Théorèmes de comparaison

Soit f, g, u, v des fonctions, L, L' des nombres réels et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Au voisinage de a :

- Si $f(x) \leq g(x)$, f tend vers L et g tend vers L',

alors $L \leq L'$.

- Si $f(x) \geq u(x)$ et si u tend vers $+\infty$, alors f tend vers $+\infty$.
- Si $f(x) \leq v(x)$ et si v tend vers $-\infty$, alors f tend $-\infty$.
- Si $|f(x) - L| \leq u(x)$ et si u tend vers 0, alors f tend vers

L.

- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, u tend vers L et v tend vers L,

alors f tend vers L.

<u>Remarque</u> **:** Les suites numériques étant des fonctions particulières, ces théorèmes restent valables dans le cas des suites.

<u>Limite et nombre dérivé</u>

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = "\frac{0}{0}"$, si f et g sont dérivables en x_0 et si

$g'(x_0) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

- En particulier si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = "\frac{0}{0}"$ et si f est dérivable

en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

<u>Limite et composée de fonctions</u>

Chacune des lettres a, b, c désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)]$, on procède ainsi :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors

$\lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = c$.

Asymptotes

Soit x_0, a, b des nombres réels, f et g des fonctions, C_f la courbe de f et C_g celle de g.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est

une asymptote à C_f, parallèle à l'axe des ordonnées.

- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ alors la droite d'équation $y = a$ est

une asymptote à C_f, parallèle à l'axe des abscisses à l'infini.

- $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f à l'infini ssi

$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

- C_g d'équation $y = g(x)$ est une asymptote à C_f d'équation

$y = f(x)$ à l'infini ssi $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Branches infinies

Soit a et b des nombres réels

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f

admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses à $+\infty$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors C_f

admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées à $+ \infty$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$ et si

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation

y = ax à + ∞.

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) et si

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$, alors C_f admet la droite d'équation

y = $ax + b$ comme asymptote à +∞.

Remarque : On a les mêmes conclusions quand x tend vers - ∞.

Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 appartenant à I.

- **Définition**

f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- **Théorème**

f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Dérivabilité en un point

Soit a, b *et* c des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

- **Définition**

f est dérivable en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$; a est appelé nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur a.

- **Théorème 1 :** f est dérivable à gauche en x_0 ssi

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$; b est appelé nombre dérivé de f à gauche en x_0 et est noté $f_g'(x_0)$.

Dans ce cas C_f admet à gauche au point d'abscisse x_0 une demi-tangente de coefficient directeur b.

Théorème 2 : f est dérivable à droite en x_0 ssi

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c$; c est appelé nombre dérivé de f à droite en x_0 et est noté $f_d'(x_0)$.

Dans ce cas C_f admet à droite au point d'abscisse x_0 une demi-tangente de coefficient directeur c

- **Théorème 3 :** Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$ alors f est dérivable en x_0.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f_g'(x_0)$ ou $f_d'(x_0)$

- **Théorème 4 :** Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si $f_g'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 deux demi-tangentes de coefficients directeurs $f_g'(x_0)$ et $f_d'(x_0)$ qui forment un point anguleux.

- **Théorème 5 :** Si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ ou

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente d'équation $x = x_0$, parallèle à l'axe des ordonnées.

<u>Equation de la tangente</u>

- La tangente à la courbe de f en x_0 ou au point $(x_0 \ ; f(x_0))$ a pour équation $y = f\ '(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

<u>Remarques</u>

- $f\ '(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0 est le coefficient directeur de la tangente.
- Si $f\ '(x_0) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
- Pour obtenir l'équation de la demi-tangente en x_0, on remplace $f\ '(x_0)$ dans l'équation ci-dessus par $f_g'(x_0)$ ou $f_d'(x_0)$.

Théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles et tangente sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition.

- La fonction $\sqrt{u}$ est continue si $u \geq 0$ et est dérivable si $u > 0$ (u étant une fonction).
- La somme ou le produit de fonctions continues (respectivement dérivables) sur un intervalle I, est continue (respectivement dérivable) sur I.
- Si f et g sont 2 fonctions continues (respectivement dérivables) sur un intervalle I et si $g(x) \neq 0$ sur I, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est continue (respectivement dérivable) sur I.
- La composée de deux fonctions continues sur leur ensemble de définition est continue sur son ensemble de définition.
- Si f est dérivable sur un intervalle I et si g est dérivable sur un intervalle contenant $f(I)$, alors gof est dérivable sur I.

Remarques :

Pour étudier la continuité (respectivement la dérivabilité) d'une fonction définie par intervalles (par exemple

$h(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ x\ \in]-\infty;\ a] \\ g(x) si\ x\ \in [a; +\infty[\end{cases}$) on applique les théorèmes généraux de la continuité (respectivement de la dérivabilité), sur les intervalles ouverts $]-\infty\ ; a[$ et $]a; +\infty[$; ensuite au point a, on applique le théorème de la continuité (respectivement les théorèmes de la dérivabilité) en un point.

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 et D_f l'ensemble de définition de f.

Si $x_0 \notin D_f$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ (L étant un nombre réel) alors f admet un prolongement par continuité en x_0 et ce prolongement est définie par la fonction g, $g(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ x \in D_f \\ L\ \ si\ x = x_0 \end{cases}$.

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit a et b des nombres réels ou + ∞ ou - ∞. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors le tableau suivant donne *f(I)*, l'image de I par *f*.

I	***f(I)***	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
[a ; b]	$[f(a)\ ; f(b)]$	$[f(b)\ ; f(a)]$
[a ; b[	$[f(a)\ ; \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x)\ ; f(a)]$

]a ; b]	$]\lim_{x\to a} f(x)\ ;f(b)]$	$[f(b)\ ;\lim_{x\to a} f(x)[$
]a ; b[	$]\lim_{x\to a} f(x)\ ;\lim_{x\to b} f(x)[$	$]\lim_{x\to b} f(x)\ ;\lim_{x\to a} f(x)[$

Conséquence du Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α appartenant à $[a\ ;\ b]$.

Bijection

- **Théorème 1:** Si f est continue et strictement croissante

(ou strictement décroissante) sur un intervalle I, alors f est une bijection de I vers $f(I)$.

- **Théorème 2 :**

f est une bijection d'un intervalle I vers $f(I)$ ssi

$\forall\ y \in f(I),\ \exists\ !\ x \in I,\ y = f(x)$.

- **Théorème 3 :** Si f est continue et strictement croissante

(ou strictement décroissante) sur un intervalle I, alors f est une bijection de I vers $f(I)$; de plus si un nombre λ (en particulier 0) appartient à $f(I)$ alors l'équation $f(x) = \lambda$ (en particulier $f(x) = 0$) admet une unique solution $\alpha \in I$.

- **Théorème 4 :** Si f est continue et strictement croissante

(ou strictement décroissante) sur $[a\ ;\ b]$ et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $[a\ ;\ b]$.

- **Théorème 5 :** Si f est une bijection sur I, alors elle admet

une bijection réciproque f^{-1}, définie sur $f(\ I\ )$, continue sur $f(\ I\ )$ et qui varie dans le même sens que f.

- **Théorème 6 :** Si f est une bijection
  - $y = f(x)$ ssi $x = f^{-1}(y)$.

- $(fof^{-1})(y) = y$ et $(f^{-1}of)(x) = x$.
- Dans un repère orthonormal C_f et $C_{f^{-1}}$ la courbe

de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonctions dérivées

Soit u, v et f des fonctions dérivables, k, a et b des constantes, $r \in \mathbb{Q}$-{0 ; 1}.

f(x)	K	x	x^r	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
f'(x)	0	1	rx^{r-1}	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	u + v	ku	uv	$\frac{k}{v}$	$\frac{u}{v}$	u^r
Dérivée	u' + v'	ku'	u'v+v'u	$\frac{-k}{v^2}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$ru'u^{r-1}$

$\frac{1}{u^r}$	$\sqrt{u}$	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$	vou
$\frac{-ru'}{u^{r+1}}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'\cos u$	$-u'\sin u$	$\frac{u'}{\cos^2 x}$	u'(v'ou)

Dérivée de la réciproque d'une bijection

➢ **Théorème :** Soit f une bijection d'un intervalle I vers $f(I)$. Si f est dérivable et de dérivée non nulle sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{f'(x)}$.

(car $f^{-1}(y) = x$).

➢ Remarques :

- Pour montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle J, on détermine l'intervalle I tel que J = $f(I)$, puis on montre que f est dérivable sur I et de dérivée non nulle sur I.
- Pour montrer que f^{-1} est dérivable en un point y_0, on

détermine le réel x_0 tel que $y_0 = f(x_0)$, puis on montre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$.

Dans ce cas $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x0)}$.

*

Inégalité des accroissements finis

- **Théorème :** Soit f une fonction dérivable sur un

intervalle I. S'il existe un nombre réel k tel que $|f'(x)| \leq k$ sur I, alors pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I,

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.

1.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice1

Soit les fonctions f, g, h, i *et* j définies par

$f(x) = -3x^3+2x+1$; $g(x) = \frac{x-1}{2-x}$; $h(x) = \frac{2x^2-x-6}{x-1}$;

$i(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; $j(x) = x - 2\sqrt{x-1}$.

1. Pour chacune de ces fonctions, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et en déduire les éventuelles asymptotes.
2. Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x+1$ est une asymptote oblique à C_h la courbe de h.
3. Etudier les branches infinies de C_i à $-\infty$ et de C_j à $+\infty$.

Exercice 2

Déterminer la limite de f en a dans les cas suivants

1) $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{2x^2-x-6}$, $a = 2$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$, $a = -1$;

3) $f(x) = \frac{sinx}{x}$, $a = 0$; 4) $f(x) = \frac{x+sinx+sin3x}{x(x^2-1)}$, $a = 0$;

5) $f(x) = \frac{x}{2+cos2x}$, $a = +\infty$.

Exercice 3

Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si\ x \leq -2 \\ \sqrt{7-x} & si\ -2 < x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{x}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ g(x) = \frac{-1+cos2x}{2x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f aux points -2 et 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat de l'étude de la dérivabilité de f en -2.

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

Exercice 4

Soit la fonction f, $f(x) = \frac{1-cosx}{x}$. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 ; définir ce prolongement.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de dérivabilité, la fonction dérivée et le signe de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1) $f(x) = x^3+x^2-5x+3$; 2) $g(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$; 3) $h(x) = (\frac{-2x+1}{x-1})^3$;

4) $i(x) = x\text{-}1+ \frac{4}{x+1}$; 5) $j(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$;

6) $k(x) = (1+cos2x)sin^2 x$; 7) $l(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 8$.

1. Déterminer l'image par f des intervalles [-3 ; -2],]-1 ;0] et [1 ; +∞[.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α ; donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.
3. En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

1. Etudier les variations de f ; soit g la restriction de f sur]-∞ ; 3].
2. Montrer que g est une bijection de]-∞ ; 3] vers un intervalle J à déterminer.
3. En déduire que g admet une bijection réciproque g^{-1} ; préciser son ensemble de définition et son tableau de variation.
4. Calculer $g(0)$; montrer que g^{-1} est dérivable au point $\frac{1}{3}$ et calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{3})$.
5. Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.
6. Déterminer l'expression explicite de g^{-1}.

1.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 8

Déterminer la limite de f en a dans les cas suivants :

1) $f(x) = \frac{2x+1}{2x^2-x-1}$; $a = +\infty$; $a = 1$; $a = \frac{-1}{2}$.

2) $f(x) = x(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$;, $a = -\infty$.

3) $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x+1}$; $a = -1$. 4) $f(x) = \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$, $a = \pi$.

5) $f(x) = \frac{2\cos 2x-1}{\cos 3x}$; $a = \frac{\pi}{6}$. 6) $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$; $a = 0$.

7) $f(x) = \frac{x+\cos x}{2+\sin x}$; $a = -\infty$; $a = +\infty$.

8) $f(x) = \frac{x\cos x}{1+x^2}$; $a = -\infty$; $a = +\infty$.

Exercice 9

Soit les fonctions f, g et h définies par $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ et $h(x) = \frac{2x^2+3x}{x+1}$. Déterminer pour chacune des fonctions ci-dessus l'ensemble de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et en déduire les éventuelles branches infinies.

Exercice 10

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x-E(x)$.
Montrer que $2x \leq f(x) < 2x+1$ et en déduire la limite de f à $+\infty$ et à $-\infty$.

Exercice 11

Soit les fonctions f et g définies par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \quad si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+1} \ si\ x < -1 \\ x+\sqrt{x^2+3x+2}\ si\ x \geq -1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 ; interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.
 b) En déduire l'équation des deux demi-tangentes en -1.

Exercice 12

Soit les fonctions f et g telles que $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{3-x}$ et $g(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 3 et g un prolongement par continuité en 0.
Définir ces prolongements.

Exercice 13

Calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$. 2) $f(x) = (-3x^2+2x+1)^5$.

3) $f(x) = x+1-\frac{4}{(2x+1)^3}$. 4) $f(x) = tan3x$. 5) $f(x) = x\sqrt{2x+1}$.

6) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

Exercice 14

Soit la fonction f, $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle I à déterminer.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

4) Déterminer l'expression de f^{-1} la bijection réciproque de f.

Exercice 15

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x$.

1) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$; préciser l'ensemble de définition de f^{-1}.

2) La fonction f^{-1} est elle dérivable en 0 ? en 1 ?

3) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $[0 ; 1[$ et que sa fonction dérivée est définie par $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 16

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

1) Etudier les variations de f.

2) Sans résoudre l'équation, montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution α appartenant à [1 ; 2].

3) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur [1 ; 2].

4) En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$, $\forall x \in [1;2]$.

Chapitre2 :GENERALITES SUR LES FONCTIONS

2.1. RESUME DU COURS

Dans ce chapitre f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, D_f est son ensemble de définition et C_f sa courbe dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Ensemble de définition

- L'ensemble de définition de toute fonction polynôme ($x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où a_0, a_1, …,a_n sont des réels et n un entier naturel non nul) est $\mathbb{R}$.
- Une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est définie si son dénominateur est différent de zéro.
- Une somme de fonctions ou un produit de fonctions est défini si chaque fonction qui constitue la somme ou le produit est définie.
- Un quotient de fonctions est défini si le numérateur et le dénominateur sont définis et si le dénominateur est différent de zéro.

- u étant une fonction donnée, la fonction

$x \to \sqrt{u(x)}$ est définie si $u(x)$ existe et $u(x) \geq 0$.

Parité d'une fonction

- f est paire ssi $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire ssi $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Remarque : Si f est paire (respectivement impaire), l'axe des ordonnées du repère est axe de symétrie (respectivement l'origine du repère est centre de symétrie) de C_f. Dans ces deux cas on peut restreindre l'étude de f à $D_f \cap [0; +\infty[$.

Périodicité d'une fonction

- f est périodique s'il existe un réel T non nul tel que

$\forall x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

Le plus petit réel T strictement positif vérifiant l'égalité ci-dessus est la période de f.

Remarques :

- Si T est la période de f, alors pour tout entier k, kT est une période de f.
- Si f est périodique de période T (> 0) alors on peut restreindre l'étude de f à $D_f \cap I$ où I est un intervalle de longueur T (la longueur de l'intervalle [a ; b] est b – a).
- Si f est périodique et paire ou périodique et impaire alors on peut restreindre l'étude de f à $D_f \cap I \cap [0; +\infty[$ où I est un intervalle de longueur T (la période) et de la forme [-a ; a].
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$; la période de la fonction

$x \to \sin(ax+b)$ ou $x \to \cos(ax+b)$ est $\frac{2\pi}{|a|}$ et celle de la fonction $x \to \tan(ax+b)$ est $\frac{\pi}{|a|}$.

Centre et axe de symétrie

- Le point I$(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de C_f ssi

$\forall x \in D_f$, $2a-x \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

- La droite (d) : $x = a$ est axe de symétrie de C_f ssi

$\forall x \in D_f$, $2a-x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.

Dans ce cas on peut restreindre l'étude de f à $D_f \cap [a;\ +\infty[$.

<u>Intersection de courbes</u>

Soit C_f la courbe de f d'équation $y = f(x)$ et C_g la courbe de g d'équation $y = g(x)$.

- Pour déterminer l'intersection de C_f et C_g, on résout l'équation $f(x) = g(x)$.
- Pour déterminer l'intersection de C_f avec la droite (d) : $y = ax+b$, on résout l'équation $f(x) = ax+b$.
- Pour déterminer l'intersection de C_f avec l'axe des abscisses d'équation $y = 0$, on résout l'équation $f(x) = 0$.
- Le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est le point $(0\ ;\ f(0))$, dans le cas où $0 \in D_f$.

<u>Position relative de deux courbes</u>

Soit $C_f : y = f(x)$ la courbe de f et la droite (d) : $y = ax+b$.

Pour déterminer la position de C_f par rapport (d) , on étudie le signe de $h(x) = f(x) - (ax+b)$.

- Si $h(x) > 0$ sur I, alors C_f est au dessus de (d) sur I.
- Si $h(x) < 0$ sur I, alors C_f est en dessous de (d) sur I.

<u>Remarque</u> : on applique les mêmes résultats dans le cas de la position de C_f par rapport à C_g: $y = g(x)$, en remplaçant $ax+b$ par $g(x)$ et (d) par C_g .

<u>Résolution graphique de l'équation $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$</u>

Le nombre de solutions de cette équation est égal au nombre de points d'intersection de la courbe de *f* avec la droite d'équation y = m (droite parallèle à l'axe des abscisses, qu'on fera coulisser du bas vers le haut pour déterminer le nombre de points d'intersection suivant les valeurs du paramètre réel m).

Fonctions associées

Soit a et b des réels, f et g des fonctions, C_f et C_g leurs courbes respectives dans un repère orthogonal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

- Si $g(x) = f(x-a) + b$, alors C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.
- Si $g(x) = - f(x)$ alors C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des abscisses.
- Si $g(x) = f(-x)$ alors C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si $g(x) = - f(-x)$ alors C_g est le symétrique de C_f par rapport à O l'origine du repère.
- Si $g(x) = |f(x)|$ alors

$$\begin{cases} C_g \; et \; C_f \; sont \; confondues \; si \; C_f \; est \; au \; dessus \; de \; l'axe(x'x) \\ C_g \; est \; le \; symétrique \; de \; C_f/(Ox) \; si \; C_f \; est \; en \; dessous \; de \; (x'x) \end{cases}$$

Extrémums – Point d'inflexion

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0.

f admet un extrémum relatif en x_0 ssi la dérivée de f s'annule en x_0 en changeant de signe. Cet extrémum $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum.
Dans ce cas, C_f admet au point $(x_0\ ;\ f(x_0))$ une tangente parallèle à $(x'x)$.

- Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle

ouvert contenant x_0 et si la dérivée seconde de f s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point $(x_0\ ;\ f(x_0))$ est un point d'inflexion de C_f.
Dans ce cas, C_f traverse sa tangente en ce point.

Représentation graphique d'une fonction

Pour représenter la courbe d'une fonction, on peut procéder comme suit :

- Représenter les points particuliers de la courbe.

(points figurant sur le tableau de variation, points d'intersection avec les axes, …).

- Représenter les droites particulières de la courbe

(Asymptotes, tangentes, …).

- Tracer la courbe en s'appuyant sur les variations de f sur

chaque intervalle du tableau de variation.

Remarques

- Si f admet un extrémum en $x_{0.}$, alors la courbe admet au point ($x_{0.}$, $f(x_{0.})$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- Si les points particuliers et les droites particulières ne sont pas suffisants pour tracer la courbe, on peut dresser un tableau de valeurs permettant de représenter quelques points de la courbe.

Représentation graphique d'une bijection réciproque f^{-1}

- Si f est une bijection sur un intervalle I et si (C) est sa courbe sur cet intervalle, alors (C) et C_f sont confondues dans le cas où I = D_f ; sinon (C) est la portion de C_f représentée sur I.
- Soit f une bijection sur un intervalle I et (C) sa courbe sur cet intervalle dans un repère orthonormal.

Pour représenter $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1}, qui est le symétrique de (C) par rapport à (d) : $y = x$, on peut procéder comme suit :

- Tracer la droite (d) : $y = x$.
- Représenter les symétriques par rapport à (d) des points particuliers de (C) .
- Représenter les symétriques par rapport à (d) des droites particulières de (C) (asymptotes, tangentes, …)
- Tracer $C_{f^{-1}}$ en reliant les symétriques des points particuliers de (C), en utilisant le fait que le symétrique d'une droite particulière de (C) est une droite particulière de $C_{f^{-1}}$ et en tenant compte du fait que f^{-1} varie dans le même sens que f.

<u>Remarques</u> : Soit la droite (d) : $y = x$ dans un repère orthonormal.

∗ Le symétrique par rapport à (d)

- d'un point A$(a\ ;\ b)$ est le point A'$(b\ ;\ a)$.
- d'une droite $(\Delta) : x = a$ est la droite $(\Delta') : y = a$.

∗ Pour représenter (Δ') le symétrique par rapport à (d) d'une droite (Δ): $y = ax + b$, on peut représenter les symétriques de deux points quelconques de cette droite par rapport à (d). (Δ') est la droite passant par ces deux symétriques.

2.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3-3x^2+4$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormal.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. a) Montrer que f admet sur $[2\ ;+\infty[$ une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ?

3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[2\ ;+\infty[$.

4. Déterminer les points d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées.

5. Déterminer l'équation de (T) la tangente à C_f en $x_0 = 1$.

6. Tracer C_f, la tangente (T) et $C_{f^{-1}}$.

7. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

Exercice 2

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ et C_f sa courbe.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$.
2. Déterminer (d) l'asymptote oblique à C_f et étudier sa position par rapport à C_f.
3. Etudier les variations de f et tracer sa courbe.
4. Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de C_f.
5. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2}{1+x}$; Tracer C_g la courbe de g à partir de C_f.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur [-2 ; 2] par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 2 ; interpréter graphiquement les résultats.
2. Etudier la parité de f et les variations de f sur [0 ; 2].
3. Tracer C_f la courbe de f et les tangentes à C_f en 0 et en 2, dans un repère orthonormal d'unité 2cm.

Exercice 4

Soit la fonction f, $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$ et C_f sa courbe

1. a) Justifier que l'étude de f peut être restreinte à l'intervalle [0 ; π].

b) Montrer que $f'(x) = 4(1-2\sin 2x)\cos 2x$.

2. Résoudre sur [0 ; π] l'équation $f'(x) = 0$ et en déduire le tableau de variation de f.

3. Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de C_f.

4. Construire C_f sur $[-\pi; \pi]$.

2.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$ et C_f sa courbe.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer les coordonnées de I, le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
3. Montrer que le point I est centre de symétrie de C_f.
4. Tracer C_f.
5. Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation
$mx^2 + 2(m-1)x - (3m+2) = 0$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = |x+2| + \frac{2}{x+1}$ et C_f sa courbe.

1. Etudier la dérivabilité de f en – 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que C_f admet deux asymptotes obliques.
4. Construire C_f.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$ et C_f sa courbe.
1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f et établir son tableau de variation.
3. Montrer que la droite (d) : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C_f à $+\infty$ et déterminer l'autre branche infinie.
4. Tracer C_f.

Exercice 8

On considère la fonction f, $f(x) = \frac{1+cos3x}{cos^3 x}$ et C_f sa courbe.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier le choix de $D = [0 ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ; \pi]$ comme ensemble d'étude.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D et en déduire les éventuelles asymptotes.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{(3sinx)(1-2cosx)}{cos^4 x}$ et dresser le tableau de variation.
4. Déterminer sur D les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
5. Tracer (C) sur $[-\pi ; \pi]$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par

$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 + \sqrt{4x^2 + 4} \ si\ x \leq 0 \\ x + 1 + \frac{x}{1+x^2} \ \ si\ x > 0 \end{cases}$ et C_f sa courbe.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Etudier les branches infinies de C_f.

4. a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.

b) f^{-1} la bijection réciproque de f est- elle dérivable en 1 ?

c) Calculer $f(1)$ puis $(f^{-1})'(\frac{5}{2})$.

5. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un repère orthonormal.

Exercice10

1. Soit la fonction g définie par $g(x) = -x\sqrt{1 + x^2} - 1$.

a) Etudier les variations de g, puis montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Déterminer la valeur exacte de α.

b) En déduire le signe de $g(x)$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^3}{3} - \sqrt{1 + x^2}$ et C_f sa courbe.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer l'équation de (T), la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

c) Etudier la position de C_f par rapport à (T) sur $[0 ; +\infty[$.

d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3-\alpha^4}{3\alpha}$.

e) Tracer C_f.

Exercice 11

A. Soit la fonction h telle que $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Etudier les variations de h.

2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que α appartient à $]1,6\,;\,1,7[$.

3. Déterminer le signe de $h(x)$.

B. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{-x} \;\; si \; x \leq 0 \\ \frac{1-x}{1+x^3} \;\; si \; x > 0 \end{cases}$

1. a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 ; interpréter graphiquement le résultat.

c) Calculer les limites aux bornes de D_f et déterminer les éventuelles branches infinies de C_f la courbe de f.

2. Calculer $f'(x)$, puis établir le tableau de variation de f.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$.

a) Montrer que $g^{-1}(x)$ existe sur un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}.

c) Déterminer l'expression de g^{-1}.

4. Représenter dans un repère orthonormal la courbe de f et celle de g^{-1}.

<u>Exercice 12</u> : Soit une f une fonction numérique dont le tableau de variation est le suivant :

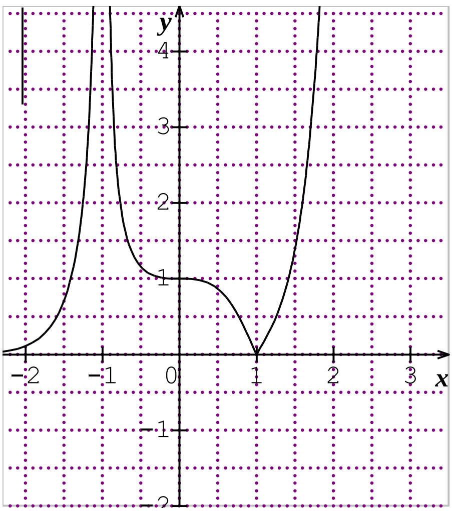
x	-3		-1		0		2		+∞
$f'(x)$		-	||	-	0	+	||	-	
f	+∞	↘	2 ||	↘	-2	↗	+∞ || +∞	↘	1

1. Donner D_f l'ensemble de définition de f, les limites aux bornes de D_f et les équations des asymptotes à C_f la courbe de f.

2. Donner l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Justifier que f admet un extrémum sur D_f.
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur D_f.
b) En déduire le signe de $f(x)$.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0\,;2[$.
a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer.
b) Etablir le tableau de variation de g^{-1} et déterminer son ensemble de dérivabilité.
6. Sachant que $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x)-2}{x+1} = +\infty$ et que $f_d'(-1) = 0$, donner l'allure de la courbe de f et celle de g^{-1}.

Exercice 13

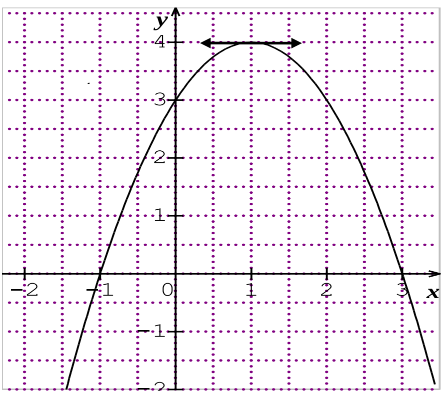
Le graphique suivant donne C_f la représentation d'une fonction f.



1. Donner D_f l'ensemble de définition de f, les limites aux bornes de D_f et les équations des asymptotes.
2. Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ et l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Ecrire l'équation de la tangente à C_f en 0 .
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1[$; montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on déterminera l'ensemble de définition.

Exercice 14

Le graphique ci-dessous donne la représentation de $f\,'$ la fonction dérivée de f.



1. Donner le signe de $f\,'(x)$ et en déduire les variations de f.
2. Donner la valeur de $f\,''(1)$ en justifiant.

3. Sachant que f est un polynôme de degré 3 et que la courbe de f passe par le point A(0 ; 1), déterminer *f(x)*.
4. Montrer que le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de C_f.

Chapitre 3 : FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN ET EXPONENTIELLES

2.4. RESUME DU COURS

2.4.1. Fonction logarithme népérien

Domaine de définition et dérivée

- Soit u une fonction ; $lnu(x)$ existe ssi $u(x)$ existe et $u(x) > 0$.
- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \rightarrow ln[u(x)]$ est dérivable sur I et $[lnu(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Remarque : $[ln|u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriétés Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$.

- $lnab = lna + lnb$; $ln\frac{1}{a} = - lna$; $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$.
- $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2} lna$; $ln\, a^r = r\, lna$; $ln1 = 0$; $lne = 1$.

- $lna = lnb$ *ssi* $a = b$;
- $lna < lnb$ *ssi* $a < b$; $lna > lnb$ *ssi* $a > b$.
- $lnx < 0$ *ssi* $0 < x < 1$; $lnx > 0$ *ssi* $x > 1$.

Limites

- $\lim_{x \to 0} lnx = -\infty$; $\lim_{x \to 0} xlnx = 0$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- $\lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$; ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$.

Fonction logarithme décimal

- La fonction logarithme décimal est la fonction notée *log* et définie sur $]0, +\infty[$ par *:* $logx = \frac{lnx}{ln10}$.

2.4.2. Fonctions exponentielles

Domaine de définition et dérivée

- Soit *u* une fonction ; $e^{u(x)}$ existe ssi u(x) existe.
- Si *u* est dérivable sur un intervalle I, alors e^{u} est dérivable sur I et $[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}$.

Propriétés Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}^*$

- $e^{a+b} = e^{a}.e^{b}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$; $e^{a-b} = \frac{e^{a}}{e^{b}}$; $(e^{a})^{r} = e^{ar}$; $e^{0} = 1$; $e^{1} = $ e.
- $e^{a} = e^{b}$ ssi a = b.
- $e^{a} < e^{b}$ ssi a < b ; $e^{a} > e^{b}$ ssi a > b.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $lne^{x} = x$; $\forall x > 0$, $e^{lnx} = x$.

- $\forall a > 0 \; et \; \forall x \in \mathbb{R}, \; a^x = e^{xlna}$.
- $y = e^x$ ssi $x = lny$.

Limites

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Racine n.ieme Soit x, y $\in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$-{1}.

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{1-\frac{1}{n}}$.
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ ssi $x = y$.
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ ssi $x < y$; $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ ssi $x > y$.
- $y = \sqrt[n]{x}$ ssi $x = y^n$.
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Fonctions puissances

On appelle fonction puissance, toute fonction f_α définie sur]0 ; +∞[par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha lnx}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Croissance comparée

- Soit α un nombre rationnel strictement positif
  - $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
  - $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{lnx} = +\infty$.

- $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} lnx = 0$.

➢ Soit n un entier naturel non nul ; $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

➢ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{lnx} = +\infty$.

Remarque : Pour les quotients dont on a calculés la limite à + ∞, la limite de leurs inverses à + ∞ est égale à 0 ;
en particulier $\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$.

2.5. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Résoudre :

1) $ln(2x\text{-}5) + ln(1+ x) = 2ln2$. 2) $2lnx + 3 = 0$.

3) $(lnx)^3$ - lnx^3 = - 2. 4) $lnx - ln(2\text{-}x) \geq 0$. 5) $ln(\frac{x+1}{x-1}) \leq 0$.

6) $(lnx)^2$ - $2lnx$ - 3> 0. 7) $e^2 e^{-x} - e^{x^2-4} = 0$.

8) $e^x - 2e^{-x} = -1$. 9) $(e^{x-1})^4 \geq e^{x^2}$.

10) $\begin{cases} 2lnx - 3lny = 5 \\ lnx + 2lny = -1 \end{cases}$. 11) $\begin{cases} e^x . e^y - e^5 = 0 \\ lnx + lny = ln6 \end{cases}$.

Exercice 2

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, les limites aux bornes de D_f, la dérivée $f\ '(x)$ et le tableau de variation de f.

1) $f(x) = xlnx - x$. 2) $f(x) = ln(\frac{1+x}{1-x})$. 3) $f(x) = \frac{lnx+1}{lnx-1}$.

4) $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. 5) $f(x) = -2x+1 + ln|\frac{x+1}{x}|$. 6) $f(x) = x + e^{-x}$.

7) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. 8) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 9) $f(x) = x - ln(1 + e^x)$.

Exercice 3

Soit la fonction f, $f(x) = ln(cosx)$ et C_f sa courbe.

1. Etudier les variations de f sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et dresser son tableau de variation.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cosx + \sqrt{3}sinx = 0$.

b) Soit la fonction g, $g(x) = ln(cosx + \sqrt{3}sinx)$; montrer que C_g la courbe de g peut se déduire de C_f par une transformation simple à préciser.

Exercice 4

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2\, lnx$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Définir ce prolongement.

B. On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2\, lnx \; si \; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier la dérivabilité de g sur $[0 ; +\infty[$.

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est – elle dérivable ?

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h^{-1}(x) = e$.
d) Construire la courbe de g et celle de h^{-1} (on représentera les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et la demi-tangente en 0).

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,e^{-x}$ et (C) sa courbe dans un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que (C) coupe la droite $\Delta : y = x$ en un unique point d'abscisse α appartenant à $[1 ; \frac{3}{2}]$.
3. Tracer (C).
4. a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $]0 ; \alpha]$ par f^{-1}.

5. Déduire du tracé de (C) la courbe de la fonction g définie par $g(x) = |2x+1|e^{-x}$.

2.6. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 6

Résoudre

1) $ln|1\text{-}x| - lnx = 0$. 2) $ln(2x\text{-}1) + ln(3x+7) > ln3$.

3) $1 - ln(2\text{-}x) \leq 0$. 4) $ln(\text{-}x+2) > 3lnx$.

5) $e^{3x+1} - 4e^{2x+1} + e^{x+1} + 6e = 0$. 6) $e^{2x} + e^{x} - 6 < 0$.

7) $2.3^{2x} - 3.3^{x} - 2 + 3.3^{-x} = 0$.

8) $\frac{2logx+3}{logx+1} = \frac{8}{3}$. 9) $\begin{cases} e^{x^2}e^{y^2} = e^{13} \\ lnx + lny = ln5 \end{cases}$.

Exercice 7

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, les limites aux bornes de D_f, et $f'(x)$ la dérivée de f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 - lnx$. 2) $f(x) = \frac{ln(1-x)}{x}$. 3) $f(x) = \frac{1}{x^2 lnx}$.

4) $f(x) = \frac{(lnx)^2}{x-1}$. 5) $f(x) = 2x + ln(2e^{-x}\text{-}1)$. 6) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

7) $f(x) = x^2e^{-x}$. 8) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - ln(1+e^x)$. 9) $f(x) = x - 2 + e^{-x}$.

Exercice 8 **(Bac 2007)**

A. Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + lnx$.

1. Dresser le tableau de variation de g.

2. Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que α appartient à $]0,2 ; 0,3[$.

3. En déduire le signe de g sur $]0 ; +\infty[$.

4. Etablir la relation $ln\alpha = -1 - \alpha$.

B.On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{xlnx}{1+x} & si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0, puis sur $]0 ; +\infty[$.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que quelque soit x élément de $]0 ; +\infty[$,
$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

6. Représenter la courbe de f.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1).e^{-x}$ et (C) sa courbe.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. Montrer que (C) coupe la droite (d) : y = x en un unique point A d'abscisse α appartenant à I = $[1 ; \frac{5}{4}]$.

3. Tracer (C).

4. Montrer que pour tout x appartenant à I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

5. En déduire que pour tout x appartenant à I,

$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|x - \alpha|$.

<u>Exercice 10 :</u> **(Bac 2008)**

A. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x < 0 \\ (2+x)e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$-{-1}.

2. a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f. Préciser les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+2)]$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$ = - 1 et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ = - 1.

c) En déduire que f est dérivable en 0 à gauche et à droite.

f est elle dérivable en 0 ?

3. Calculer $f'(x)$ pour

a) $x \in]0; +\infty[$.

b) $x \in]-\infty; -1[\cup]-1;\ 0[$.

5. Etudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ et pour $x \in]-\infty; -1[\cup]-1;\ 0[$.

6. Dresser le tableau de variation de f.

7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à]-3 ; -2[.

8. Tracer (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ d'unité 1cm .

(mettre en évidence l'allure de (C) au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes).

B. Soit g la restriction de f à]-∞; -1[.

1. Montrer que g définit une bijection de $]-\infty ; -1[$ sur un intervalle J à préciser.

2. On note g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Calculer $g(-2)$. Montrer que g^{-1} est dérivable en $ln3$.

b) Calculer $(g^{-1})'(ln3)$.

c) Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

Chapitre 4 : NOMBRES COMPLEXES SIMILITUDES DIRECTES

1.1. RESUME DU COURS

Dans ce chapitre $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé orienté du plan.

1.1.1. Nombres complexes

Dans cette partie a, b, a', b' sont des nombres réels et z , z' des nombres complexes.

Forme algébrique

- Tout nombre de la forme $a + ib$ où $i^2 = -1$ est appelé nombre complexe.
- L'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
- a est la partie réelle de z et est notée Re(z) ;
  b est la partie imaginaire de z et est notée Im(z).

- Tout nombre réel a est un nombre complexe.
- Tout nombre complexe de la forme ib, est appelé imaginaire pur.

Egalité de deux nombres complexes

Soit deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$z = z'$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Calcul dans $\mathbb{C}$

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les règles de calcul de l'addition et de la multiplication sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Les nombres complexes de la forme $a + ib$ avec $b \neq 0$ n'ont pas de signe et on ne peut pas dire que l'un est plus grand ou plus petit que l'autre.

Nombre complexe conjugué

- Le nombre complexe conjugué de $z = a + ib$, est $\bar{z} = a - ib$.
- **Propriétés** :
  - $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \,.\, \overline{z'}$; $\bar{\bar{z}} = z$.
  - $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, $\overline{(z')^n} = (\overline{z'})^n$ où $z' \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.
  - Si z est un réel alors $\bar{z} = z$.
  - Si z est un imaginaire pur alors $\bar{z} = -z$.
  - Si $z = a + ib$ alors $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2ib$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
- **Remarque :** Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par le nombre complexe conjugué du dénominateur.

Affixe d'un point ou d'un vecteur

- A tout point $A(a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre Complexe $z_A = a + ib$ et réciproquement.

z_A est appelé affixe de A et A est appelé point image de z_A ; on note $A(z_A)$ et on lit A d'affixe z_A .

- A tout vecteur $\vec{w}\ (a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre complexe $z_A = a + ib$ et réciproquement.

z_A est appelé affixe de $\vec{w}$ et $\vec{w}$ est appelé vecteur image de z_A ; on note $\vec{w}\,(z_A)$ et on lit $\vec{w}$ d'affixe z_A.

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

- Si $G(z_G)$ est le barycentre de $(A\ ;\ a)$, $(B\ ;\ b)$ *et* $(C\ ;\ c)$ alors $z_G = \frac{1}{a+b+c}\,(az_A+bz_B+cz_C)$ où z_A, z_B *et* z_C sont les affixes respectives des points A, B et C.

- Si $I(z_I)$ est le milieu de [AB], alors $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ où z_A *et* z_B sont les affixes respectives des points A et B.

Module d'un nombre complexe

- **Définition** : Soit $z = a + ib$ l'affixe d'un point M dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$;

le module de z est $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- **Propriétés** :

- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$; $|zz'| = |z|.|z'|$; $|\bar{z}| = |z|$.
- $|z| = 0$ ssi $z = 0$.
- $|z| \geq 0$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $|(z')^n| = |z'|^n$ où $z' \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}^*$.
- Si z est un réel alors le module de z est la valeur absolue de z.
- Si z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B,

alors | $z_B - z_A$ | = AB.
On s'appuie sur cette égalité pour interpréter graphiquement le module d'un nombre complexe.

<u>Argument d'un nombre complexe non nul</u>

- **Définition** : soit z un nombre complexe non nul et M(z) son point image dans le repère (O,$\vec{u},\vec{v}$). On appelle argument de z, une mesure en radians de l'angle ($\vec{u},\overrightarrow{OM}$).

On note argz = ($\vec{u},\overrightarrow{OM}$).

- **Propriétés** : Soit z et z' des nombres complexes non nuls et n un entier naturel non nul.
  - arg(zz') = argz + argz' ; arg($\frac{z}{z'}$) = argz – argz' .
  - arg($\frac{1}{z}$) = - argz ; arg$\bar{z}$ = - argz ; argz^n = n.argz.

- **Autres propriétés** :

Soit z_A, z_B, z_C les affixes respectives des points A, B, C dans le repère (O, $\vec{u},\vec{v}$).
Si $z_A \neq z_B$ et $z_A \neq z_C$ alors :

- arg(z_B - z_A) = ($\vec{u}$; $\overrightarrow{AB}$) .
- arg ($\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$) = ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) .

On s'appuie sur l'une de ces égalités pour interpréter graphiquement l'argument d'un nombre complexe non nul.

- Si $z = a + ib$ et z $\neq 0$, alors on peut déterminer θ un argument de z à partir des égalités $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$.

<u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul</u>

- Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme z = $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où r est le module de z et θ un de ses arguments.

Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

- Pour obtenir la forme trigonométrique d'un complexe $z = a + ib$, on calcule son module et on détermine θ un de ses arguments ; ainsi $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

<u>Attention</u>

- z = $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est une forme trigonométrique de z que si $r > 0$.
- z = $r(\cos\theta - i\sin\theta)$ ou z = $r(\sin\theta + i\cos\theta)$ ne sont pas des formes trigonométriques de z.

<u>Remarque</u> : on peut aussi déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$ en procédant comme suit :

z = $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta + \sin\theta)$,

θ étant un réel qui vérifie $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

- **Formule de Moivre** : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}$,
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

<u>Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul</u>

- La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul est z = $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où r = | z | et θ = argz .

En posant $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, on obtient z = $re^{i\theta}$.

Donc tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme

$z = r.e^{i\theta}$ où $r = |\, z\,|$ et θ = argz ;
cette écriture est appelée forme exponentielle du complexe z.

- Propriétés : $e^{i\theta}.\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
- **Formules d'Euler** : $\forall \theta \in \mathbb{R}$,
  $cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Linéarisation – Opération inverse de la linéarisation

- Pour linéariser $cos^k x$ ou $sin^k x$, k∈ ℕ*-{1}, on utilise les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton.
- Pour écrire $coskx$ ou $sinkx$, (k∈ ℕ*-{1}) en fonction des puissances de cosx et sinx, on utilise la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton.

Réel et imaginaire pur

Soit Z un nombre complexe

- **Propriété 1**
  - ⁎ Z est un réel ssi Im(Z) = 0.
  - ⁎ Z est un imaginaire pur ssi Re(Z) = 0.
- **Propriété 2**
  - ⁎ Z est un réel ssi $\bar{Z}$ = Z.
  - ⁎ Z est un imaginaire pur ssi $\bar{Z}$ = - Z.
- **Propriété 3**
  - ⁎ Z est un réel ssi (Z = 0) ou (Z ≠0 et argZ = 0 (π)).
  - ⁎ Z est un imaginaire pur ssi (Z = 0) ou (Z ≠0 et argZ = $\frac{\pi}{2}$ (π)).
- **Propriété 4**
  - ⁎ Z est un réel strictement positif ssi argZ = 0 (2π).

$*$ Z est un réel strictement négatif ssi argZ = π (2π).

$*$ $Z = bi$, $b > 0$ ssi argZ = $\frac{\pi}{2}$ (2π).

$*$ $Z = bi$, $b < 0$ ssi argZ = - $\frac{\pi}{2}$ (2π).

Remarque : Dans le repère (O, $\vec{u}, \vec{v}$)

- l'axe des abscisses (O, $\vec{u}$) est l'axe des réels.
- l'axe des ordonnées (O, $\vec{v}$) est l'axe des imaginaires

purs.

Ensemble de points

Soit A et B deux points distincts et r un réel positif. L'ensemble des points M tels que :

- MA = MB est la médiatrice du segment [AB].
- MA = r est le cercle de centre A et de rayon r.
- $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi)$ est la droite (AB) privée de A et B.
- $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = 0\ (2\pi)$ est la droite (AB) privée de [AB].
- $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = \pi\ (2\pi)$ est le segment [AB] privé de A et B.
- $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
- $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ est l'un des demi-cercles de diamètre [AB] privé des points A et B.
- $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ est l'un des demi-cercles de diamètre [AB] privé des points A et B.

Remarques : Soit a, b des nombres réel et r un réel positif.

- L'équation du cercle de centre I(a ; b) et de rayon r est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
- $x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$; $x^2 - ax = (x - \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$.

Ces deux égalités nous permettront dans les exercices d'obtenir la forme ci-dessus de l'équation d'un cercle, afin d'indiquer son centre et son rayon.

Racines n-ièmes

- **Définition** : Soit c un complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$;

On appelle racine n-ième de c, tout complexe z tel que z^n = c

- **Théorème** : Soit θ un réel et r un réel strictement positif.

Les racines n-iemes du nombre complexe r$e^{i\theta}$ sont les nombres complexes $z_k = \sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ où k ∈{0 ; 1 ; … ; n-1}.

- **En particulier :** Les racines n-ièmes de 1 (1 = 1.$e^{i.0}$),

appelées racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes z_k = $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où k ∈{0 ; 1 ; … ; n-1}.

- **Propriétés**

- La somme des n racines n-ièmes d'un complexe est nulle
- Si $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont les points images respectifs des

racines n-ièmes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ d'un nombre complexe dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, alors ces points sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

- **Racine carrée d'un nombre complexe de la forme *a + ib***

Pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe de la forme $a + ib$, on détermine les complexes $z = x + iy$ tels que $z^2 = a + ib$; ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} .$$

Remarque

Ces racines carrées sont au nombre de deux et l'une est l'opposée de l'autre.

Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ (*où a, b, et c* sont des nombres complexes avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta \neq 0$, (E) a alors deux solutions distinctes

$\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$, où δ est un nombre complexe dont le carré est égal à Δ , c'est-à-dire une racine carrée de Δ.

Remarque :

Soit k un réel strictement positif, α *et* β des nombres réels.

- Si Δ = k alors $\Delta = (\sqrt{k})^2$; on choisit $\delta = \sqrt{k}$.
- Si Δ = - k alors $\Delta = i^2.k = (i\sqrt{k})^2$; on choisit $\delta = i\sqrt{k}$.
- Si $\Delta = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ on détermine alors δ une racine carrée de Δ en résolvant le système ci-dessus.
- Dans le cas Δ = k (respectivement Δ = - k) on pouvait choisir la racine carrée opposée $\delta = -\sqrt{k}$ (respectivement $\delta = -i\sqrt{k}$).

1.1.2. Similitudes directes

Soit *z, z', a, b,* ω des nombres complexes, k et θ des nombres réels, *M(z), M'(z'),* $\Omega(\omega)$ des points du plan et $\vec{w}$*(b)* un vecteur.

Expression complexe

- **d'une translation t = $t_{\vec{w}(b)}$.**

M' = t(M) ssi $\underline{z' = z + b}$.

- **d'une homothétie h = h[$\Omega(\omega)$; k] , k $\neq$ 0.**

M' = h(M) ssi $\underline{z' - \omega = k(z - \omega)}$.

- **d'une rotation r = r[$\Omega(\omega)$; θ].**

M' = r(M) ssi $\underline{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$.

- **d'une similitude directe s = s[$\Omega(\omega)$; θ; k], k** > 0.

M' = s(M) ssi $\underline{z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)}$.

Remarques : Soit k le rapport de l'homothétie.

- Si k > 0, alors s = roh = hor = s[$\Omega(\omega)$; $\theta; k$] .
- Si k < 0, alors s = roh = hor = s[$\Omega(\omega)$; $\theta + \pi; -k$] .
- De manière générale, une similitude directe est une translation ou une homothétie ou une rotation ou la composée d'une homothétie avec une rotation.
- Le centre Ω d'une similitude directe, son angle θ et son rapport k sont appelés éléments caractéristiques de la similitude.

Expression réduite d'une similitude directe

- Toute application *f* du plan dans le plan, qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que *z' = az + b où* $\underline{a \in \mathbb{C}^*}$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude directe.

- Si *a = 1* alors f est la translation de vecteur $\vec{w}(b)$.
- Si $a \in \mathbb{R}$-{1} alors *f* est l'homothétie de centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$ et de rapport a.
- Si $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et si $|a| = 1$ alors *f* est la rotation de centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$ et d'angle $\arg a$.

- Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et si $|a| \neq 1$ alors f est la similitude

directe de centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$, d'angle arga et de rapport |a|.

Remarque : Le centre Ω d′affixe ω de la similitude ou de la rotation ou de l'hométhétie est le point invariant de *f* ;
c'est-à-dire le point d'affixe *z* vérifiant *z'* = z.

Propriété caractéristique d'une similitude directe

Soit la similitude directe s de rapport k $(k > 0)$, d'angle θ et *A*, *B*, *C* trois points du plan.
Si *s(A)* = *A* et si *s(B)* = *C*, alors s est la similitude de centre *A*, de rapport k = $\frac{AC}{AB}$ et d'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Détermination d'une similitude directe

Pour déterminer la similitude directe s telle que *s(A) = A'* et *s(B)* = *B'*, où *A*, *B*, *A'* et *B'* sont des points, on peut procéder de cette manière :

Soit *s : z' = az + b* ; $\begin{cases} s(A) = A' \\ s(B) = B' \end{cases}$ ssi $\begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases}$.

La résolution du système d'inconnue *a et b* donne l'expression de la similitude s.

Autres propriétés

Soit A, B, Ω des points et la simitude s = s[$\Omega(\omega)$; $\theta; k$], (k> 0)

- L'image d'une droite (d) par s est une droite (d') .

Si (d) est la droite (AB), alors son image (d') est la droite (A'B') où A' = s(A) et B' = s(B).

- L'image d'un cercle (C) par s est un cercle (C').

Si (C) est le cercle de centre I et de rayon r, alors son image (C') est le cercle de centre I' et de rayon kr, où I'= s(I) et k le rapport de s.

1.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \frac{i-3}{-1-2i}$.
2. Z_1 = (z+2)(2z- i) et $Z_2 = \frac{z+1-i}{z-2}$

(on posera $z = x + iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$).

Exercice 2

Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1) z = 1- $i\sqrt{3}$; 2) z = - 1 - i ; 3) z = - $\sqrt{6}$ + i$\sqrt{2}$

4) z = - sin2θ + 2i$cos^2\theta$, $\theta \in]0;\ \pi]$.

5) z = 1+ cos x + isin x, $x \in]\pi; 2\ \pi[$.

Exercice 3

On considère les points *A, B, C* de coordonnées respectives (1; -3), (4 ; 5) et (-3 ; 2).

1. Quels sont les affixes des points *A, B et C* et des vecteurs

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Déterminer l'affixe de I le milieu du segment *[AB]* et celui de *G* le barycentre de *(A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3).*

3. On définit les points *D et E* par $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$; déterminer l'affixe des points *D et E*.

4. Démontrer que les points *A, D et E* sont alignés.

Exercice 4

On donne les nombres complexes $a = 5\sqrt{2}(1 + i)$ et $b = -5(1+ i\sqrt{3})$.

1. Déterminer le module et un argument de a, b et $\frac{b}{a}$.

2. Soit Z le nombre complexe tel que $aZ = b$; écrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 5

On considère le complexe $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

1. Calculer z^2.

2. Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.

3. Déterminer les entiers n tels que z^n soit un imaginaire pur.

Exercice 6

Dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit les points A(1+ i), B(-3- i) et C(2i)

1. Placer les points A, B, C et déterminer la nature du triangle ABC.

2. Déterminer le point D tel que ADBC soit un parallélogramme.

3. Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tels que

a) $|z - 2i| = 3$. b) $|z - 1 - i| = |z + 3 + i|$. c) $|\bar{z} - 1 + i| = 1$.

d) $|iz + 2| = 3$.

<u>Exercice 7</u>

A tout complexe $z \neq 2i$, on associe le complexe $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que

1. Z soit un réel.
2. Z soit un imaginaire pur.
3. Z soit un réel strictement positif.
4. Z soit un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative.
5. $|Z| = 1$.

<u>Exercice 8</u>

1. Exprimer $sin5x$ en fonction de sinx.
2. Linéariser $cos^3 x sin^2 x$.

<u>Exercice 9</u>

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

1) $\frac{iz}{z+i} = 1 + 2i$. 2) $z^2 + z - 6 = 0$. 3) $4z^2 + 4z + 1 = 0$.

4) $z^2 + z + 1 = 0$. 5) $z^2 = 3 - 4i$. 6) $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$.

<u>Exercice 10</u> (Bac 2007)

Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation

(E) : $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0$.

1. a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.

b) Achever la résolution de l'équation (E).

2. Dans le plan complexe on désigne par A, B, C les points d'affixes respectifs $z_A = 1$; $z_B = i$; $z_C = 2 + i$.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D, image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Montrer que A, B, C *et* D sont sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 11 **(Bac 2005)**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2. a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.

b) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}$ (-1 - i). En posant u = $\frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^7 - 1 = 0$.

2. Soit $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, calculer $1 + u + u^2 + \ldots + u^6$.

3. En déduire que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = 0$.

Exercice 13

Soit f l'application du plan complexe qui à tout point M(z), associe le point M'(z') défini par z' = (1+ i)z - 1.

1. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera ses éléments caractéristiques.

2. Soit la droite (d) : $x - y + 2 = 0$ et (C) le cercle de centre I(1-i) et de rayon 2. Déterminer (d') et (C') les images respectives de (d) et (C) par la similitude f.

Exercice 14

Soit A(-1), B(-2+ i), C(i) et D(1-2i) des points du plan,

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s tel que s(A) = B et s(C) = D.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s' qui laisse invariant A et transforme B en C.

3. Déterminer l'expression analytique de la similitude s'' de centre C, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport 2.

1.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 15

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *et* $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ où r, r' sont des réels strictement positifs et θ, θ' sont des réels.

1. Démontrer que

a) $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.

b) $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg\bar{z} = -\arg z$.

2. Application : soit $c = -5(1+ i\sqrt{3})$.

a) Déterminer le module et un argument de c.

b) En déduire le module et un argument de $\overline{-c}$.

Exercice 16 **(Bac 2000)**

On considère les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives

$Z_1 = 1$; $Z_2 = 1+ \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $Z_3 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$.

1. a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes $Z_2 - Z_1$ et $Z_3 - Z_1$.

b) Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

2. Soit S la similitude directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1.

a) Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) On désigne par M' d'affixe Z', l'image par S du point M d'affixe Z. Exprimer Z' en fonction de Z ; en déduire l'image par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

<u>Exercice 17</u> **(Bac 2003)**

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation : (E) : $Z^3 + (1-8i)Z^2 - (23+4i)Z - 3 + 24i = 0$.

1. a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions de (E).

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit les points A, B, C d'affixes respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$ et G la barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $2i$ et $2\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont dans cet ordre en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme A en B et B en C.

<u>Exercice 18</u>

A tout complexe $z \neq -i$, on associe le complexe $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Soit le point A(-i), r le module de $z + i$ et α un de ses arguments.

1. Donner une forme trigonométrique de f(z) – i en fonction de r et α.

2. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M(z) tels que $|f(z) - i| = \sqrt{2}$.

3. Déterminer et construire l'ensemble (d) des points M(z) tels que f(z) – i soit un réel strictement négatif.

Exercice 19

1. Démontrer que l'équation $2z^2 - 2(1-\cos 2a)z + 1 - \cos 2a = 0$, $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$ n'admet pas de solution réelle.

2. Déterminer alors les solutions complexes de cette équation.

3. Calculer en fonction de a, le module et un argument de ces solutions.

Exercice 20

1. Montrer que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle.

2. a) En utilisant la question (1), montrer que
$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.

b) En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation
$4x^2 - 2x - 1 = 0$.

c) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 21 **(Bac 2011)**

1. Soit *x et y* des réels, $z = x + iy$ un nombre complexe

a) Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est sa partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ? Quelle est le module de z ?

b) Soit α un argument de z pour z ∈ $\mathbb{C}^*$; déterminer le cosinus et le sinus de α en fonction de z.

c) Soit M(z) un point du plan complexe et M'(z') l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ ; exprimer z' en fonction de z et θ.

2. On considère l'équation (E) : $\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) Soit les points A($-4\sqrt{3}$ - 4i) et B(($-4\sqrt{3}$ + 4i) dans le repère orthonormé (O,$\vec{u},\vec{v}$). Calculer OA, OB et AB ; en déduire la nature du triangle OAB.

c) Soit le point C($\sqrt{3}+i$) et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe de D.

3. Soit G le barycentre des points pondérés (O ; 1), (D ; -1) et (B ; -1).

a) Montrer que G a pour affixe g = $-4\sqrt{3}$ + 6i.

b) Placer les points A, B, C et G dans le repère (O,$\vec{u},\vec{v}$).

c) Déterminer une mesure en radians de l'angle ($\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GC}$). En déduire la nature du triangle GAC.

Exercice 22

1. Soit l'application f : M(z) → M'(z').

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f dans les cas suivants :

a) z' = ($-\sqrt{3}$ + i)(z – i). ; b) z' – 3i = 2 + z.

c) z' = - 5iz. ; d) z' = i + $e^{-i\frac{\pi}{3}}z$.

2. Soit la similitude directe f définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - 2\sqrt{3} \end{cases} ;$$

Donner l'écriture complexe de *f*.

Exercice 23

Soit *f* l'application du plan qui à tout point M(z), associe le point M'(z') tel que z' = - iz + 4i .

1. Montrer que *f* admet un unique point invariant Ω dont on déterminera son affixe ω.

2. a) Exprimer z'- ω en fonction de z – ω.

b) Reconnaître l'application *f* et déterminer sa forme analytique.

3. Déterminer l'image par *f* de la droite (d) : y = 2x-1 et celle du cercle (C) : x^2 + 2x + y^2 - y =1.

4. Déterminer l'ensemble des points M(z) dont les images M'(z') par f est sur l'axe ($x'x$).

Exercice 24

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante :

Z_0 =1 et, pour n entier naturel supérieur ou égal à1,

$Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i.$

1. Pour tout entier n, on pose $U_n = Z_n - i$.

a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et en déduire la nature de (U_n).

b) Montrer que $\forall\, n \geq 1, U_n = (1-i)(\frac{1}{3})^n$.

2. a) Exprimer en fonction de n la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de U_n et calculer les limites des suites (x_n) et (y_n).
b) Soit A_n le point d'affixe U_n. Montrer que les points A_n sont alignés.

Chapitre 5 : SUITES NUMERIQUES

1.1. RESUME DU COURS

Soit (U_n) une suite numérique définie sur E, une partie de $\mathbb{N}$.

Suites monotones

- (U_n) est croissante ssi $U_{n+1} - U_n \geq 0, \forall n \in$ E.
- (U_n) est décroissante ssi $U_{n+1} - U_n \leq 0, \forall n \in$ E.
- (U_n) est constante ssi $U_{n+1} - U_n = 0, \forall n \in$ E.

Suites bornées

- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M, $U_n \leq M, \forall n \in$ E.
- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m, $U_n \geq m, \forall n \in$ E.
- (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Suites convergentes

- (U_n) est convergente si elle admet une limite réelle (quand n tend vers $+\infty$).
- (U_n) est divergente si elle n'est pas convergente.

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Soit (U_n) une suite définie par U_{n+1} = f(U_n) où f est une

fonction continue. Si (U_n) converge vers L (L $\in \mathbb{R}$), alors L est une solution de l'équation f(x) = x.

Théorèmes de comparaison (voir chapitre 1)

Suites arithmétiques – suites géométriques

- **Définition** :
- (U_n) est arithmétique ssi U_{n+1} - U_n = constante ;

cette constante est la raison de la suite et elle est en général notée r.

- (U_n) est géométrique s'il existe une constante q telle que

U_{n+1} = qU_n. q est la raison de la suite.

- **Propriétés**

Soit (U_n) une suite de premier terme U_0 de raison r ou q selon que la suite est arithmétique ou géométrique.

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Relation entre les termes	$U_n = U_0 + n.r$ $U_n = U_p + (n - p).r$	$U_n = U_0 \,.\, q^n$ $U_n = U_p . q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$\dfrac{(nb\ de\ t)(1^{er}\ t + dern.t)}{2}$	$(1^{er} t)[\frac{1-q^{nb\ de\ t}}{1-q}]$, q $\neq 1$
Limite	-Si r > 0, $lim\, U_n$ = +∞ -Si r < 0, $lim\, U_n$ = -∞	- Si -1< $q < 1$ alors $\lim\limits_{n} q^n$= 0 - Si q > 1 alors $lim\ q^n$ = +∞ - Si q = 1 alors $lim\ q^n$ = 1 - Si q≤-1 alors $lim\ q^n$ n'existe pas

Remarques :

- « 1^{er} t » signifie premier terme et « dern.t » signifie dernier terme .

- « nb de t » signifie nombre de termes et

nb de t = indice du dern.t – indice du 1^{er} t + 1.

- a, b, c dans cet ordre sont en progression arithmétique

ssi a + c = 2b.

- a, b, c dans cet ordre sont en progression géométrique

ssi ac = b^2 .

<u>Démonstration par récurrence</u>

Pour montrer qu'une propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel n $\geq n_0$, on procède par étapes :

- On vérifie que la propriété est vraie au premier rang n_0.

- On suppose que la propriété est vraie à un rang p $\geq n_0$.

- On montre que la propriété est vraie au rang p+1 (en utilisant le plus souvent la supposition appelée hypothèse de récurrence).

5.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n}$.

1. Calculer U_1, U_2, V_0 et V_1.
2. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on indiquera sa raison et son premier terme.
3. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
4. Exprimer en fonction de n, $S_n = V_0+V_1+\ldots+V_n$.
5. Etudier la convergence des suites (V_n), (U_n) *et* (S_n).

Exercice 2

Soit les suites U et V définies par $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2 \end{cases}$ et

$V_n = U_n + 3$.

1. Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer en fonction de n, $S_n = V_1+V_2+\ldots+V_n$ et $S'_n = U_1+U_2+\ldots+U_n$.
4. Calculer la limite de V_n, U_n, S_n *et* S'_n.

Exercice 3

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$.

1. Montrer par récurrence que U est minorée par 2.
2. Etudier la monotonie de la suite U.
3. En déduire que U converge vers un nombre réel dont on déterminera sa valeur.

Exercice 4 **(Bac 2004)**

Soit la suite géométrique U de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$ et V la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1. a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b) En déduire z_n.

2. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ i et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.
3. Pour tout n, on pose $Z_n = z_0 z_1 \dots z_n$. Exprimer en fonction de n, un argument de Z_n.

5.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 5 **(Bac)**

A. Soit (U_n) la suite réelle définie par U_0 fixé et pour tout n ∈ ℕ $U_n = 1{,}05U_{n-1} + 1000$ et soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 20000$.

1. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.
2. Calculer V_n en fonction de V_O et n. En déduire U_n en fonction de U_0 et n.

B. En février 1995 la population électorale d'une commune était de 20.000 électeurs. Chaque année cette population électorale augmente de 5 % et de plus, 1000 électeurs supplémentaires viennent s'y établir définitivement.

1. Préciser la population électorale en février 2000 dans cette commune.
2. Etant donné que le taux d'abstention est de 20 %, déterminer le nombre de votants dans cette commune en 2000.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

1. Représenter la courbe de f dans un repère orthonormal.
2. Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

Calculer U_1, U_2 et en déduire le sens de variation de (U_n).

3. Soit la suite (V_n) définie par $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$

a) Représenter sur l'axe des abscisses du repère précédent les trois premiers termes de la suite (V_n).
b) Démontrer que la suite (V_n) est minorée par 2.
c) Etudier la monotonie de la suite (V_n).
d) En déduire que (V_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 7

Soit la suite U définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5}$. On se propose d'étudier la limite de la suite U par deux méthodes :

Première méthode :

1. Justifier que $U_n \geq \frac{-1}{2}$, $\forall n$.
2. Etudier les variations de U.
3. En déduire la limite de la suite U.

Deuxième méthode :

Soit la suite V définie par $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite V est géométrique.
2. Exprimer U_n en fonction de n et en déduire la convergence de la suite U.

Exercice 8 **(Bac 2004)**

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = ln(U_n) - 2.$$

1. Calculer U_1 et V_1.
2. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Ecrire V_n puis U_n en fonction de n.
4. Etudier la convergence des suites (U_n) et (V_n).

<u>Exercice 9</u> **(Bac 2008)**

Soit le complexe a = -1- i et (Z_n) la suite définie par

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \ et \ Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1-a)Z_n + aZ_{n-1}, \forall \, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Déterminer Z_2 et Z_3 sous forme algébrique.

2. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = Z_{n+1} - Z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer U_0 et U_1 sous forme algébrique.

b) Démontrer que (U_n) est géométrique de raison – a.

c) Exprimer U_n en fonction de n et a.

3. Soit $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de Z_n.

En déduire que $Z_n = -1 + (1+i)^n$.

<u>Exercice 10</u> **(Bac 1999)**

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \exp(1 - \frac{n}{2})$; $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

b) Justifier que la suite (V_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = lnU_n$ existe et est arithmétique.

2. On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ et $P_n = U_0.U_1\ldots.U_n$

a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite à l'infini de S_n et de P_n.

<u>Exercice 11</u>

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n} \end{cases}$

1. Montrer que la suite (U_n) est positive.

2. Etudier la monotonie de (U_n).

3. En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

4. Soit $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p$; montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = e^{-S_n}$. En déduire la limite de (S_n).

Exercice 12

1.a) Etudier les variations de la fonction *f* définie par :
f(x) = $e^{2x} - 1$.

b) Démontrer que sur [-1 ; $\frac{-3}{4}$] l'équation *f(x)* = *x* admet une solution unique λ.

c) Montrer que pour tout *x* de l'intervalle $[-1; \frac{-3}{4}]$, |*f'(x)*| $\leq \frac{1}{2}$.

2. On considère la suite (Un), n ∈ ℕ telle que $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = e^{2U_n} - 1 \end{cases}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout n, - 1≤ $U_n \leq \frac{-3}{4}$.

b) Montrer que pour tout n, on a : | U_{n+1}- λ | ≤ $\frac{1}{2}$ | $U_n - \lambda$| .

c) En déduire que | U_n- λ | ≤ $\frac{1}{2^{n+2}}$.

d) Etudier la convergence de la suite (U_n).

Chapitre 6 : PRIMITIVES – CALCUL INTEGRAL EQUATIONS DIFFERENTIELLES

6.1. RESUME DU COURS

6.1.1. PRIMITIVES

Définition :

Une fonction *F* est une primitive d'une fonction *f* sur un intervalle I si *F* est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in$ I.

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I, y admet une infinité de primitives.

Propriétés :

- Si *f* est une fonction qui admet *F* comme primitive sur un intervalle *I*, alors
  - toutes les primitives de f sont de la forme F + k où k est un nombre réel.
  - pour tout couple $(x_0; y_0)$ où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, f admet une primitive et une seule F_0 qui prend la valeur y_0 en x_0.
- Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I et si *v* est une fonction dérivable sur un intervalle contenant *u(I)*, alors la fonction $u'(v'ou)$ admet sur I la fonction vou comme primitive.

Primitives de fonctions usuelles :

Soit f et u des fonctions, F une primitive de f, k, a et b des nombres réels ($a \neq 0$), $n \in \mathbb{N}^*$-{1} et $r \in \mathbb{Q}^*$-{-1}.

f(x)	0	k	x^r	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$cosx$	$sinx$	$\frac{1}{cos^2x}$
F(x)	k	kx	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$2\sqrt{x}$	$sinx$	$-cosx$	$tanx$

$\frac{1}{x}$	e^x	e^{ax+b}	$cos(ax+b)$	$sin(ax+b)$	$\frac{a}{cos^2(ax+b)}$
$ln\|x\|$	e^x	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$\frac{1}{a}sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b)$	$tan(ax+b)$

Opérations sur les primitives

Soit f, g et u des fonctions, F et G des primitives respectives de f et g, k un nombre réel, $n \in \mathbb{N}^*$-{1} et $r \in \mathbb{Q}^*$-{-1}.

Fonction	f+g	kf	$u'u^r$	$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'cosu$	$u'sinu$
Primitive	$F+G$	kF	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$2\sqrt{u}$	$ln\|u\|$	e^u	$sinu$	$-cosu$

6.1.2. CALCUL INTEGRAL

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. On appelle intégrale de f, de a à b le nombre réel

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

Remarques :

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$
- $\int_a^b f(x)dx$ existe si f est continue sur $[a\ ;\ b]$ ou $[b\ ;\ a]$.

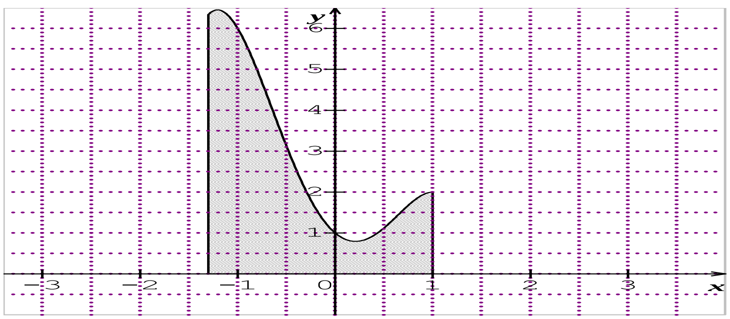
Interprétation graphique d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$, $(a < b)$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Si f est positive sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du

domaine limité par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Ce domaine est aussi défini par l'ensemble des points $\{M(x\ ;\ y),\ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

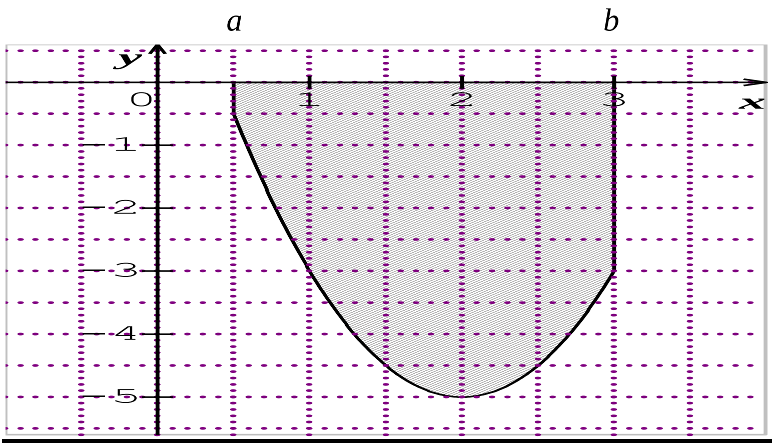


a b

- Si f est négative sur [a ; b] alors $-\int_a^b f(x)dx$ est l'aire

du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Ce domaine est aussi défini par l'ensemble des points $\{M(x\ ;\ y),\ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}$.



Remarque :

L'aire $\mathcal{A} = |\int_a^b f(x)dx|$ est exprimée en unité d'aire.

- Si (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthogonal d'unités m et n centimètres alors $\mathcal{A} = |\int_a^b f(x)dx|$.(m.n) cm^2.
- Si (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormé d'unité m centimètres alors $\mathcal{A} = |\int_a^b f(x)dx|$.(m.m) cm^2.

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a, b, c des éléments de I et α une constante..

- $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. (relation de Chasles)
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Aire du domaine compris entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$, C_f et C_g leurs courbes respectives.
Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a\ ;\ b]$, alors l'aire du domaine compris entre C_f, C_g, les droites $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.
Ce domaine est aussi défini par l'ensemble des points
$\{M(x\ ;\ y), a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

Inégalités et intégrales

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b des éléments de I tels que $a < b$.

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Remarque :
I = $\int_a^b f(x)dx$, implique que $a \leq x \leq b$;
donc pour encadrer I on peut commencer par $a \leq x \leq b$, encadrer ensuite $f(x)$, puis l'intégrale I en utilisant la deuxième propriété de la rubrique « Inégalités et intégrales ».

Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b des éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ sur I,
alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Fonction intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est appelée fonction intégrale de f.
Cette fonction φ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Intégration par parties
Soit u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I et a, b des éléments de I.
$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Calcul de volume

- Soit $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un repère orthogonal de l'espace d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Si S(t) est l'aire de la section d'un solide par le plan d'équation $z = t$ alors le volume de la partie du solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ $(a \leq t \leq b)$ est $V = \int_a^b S(t)dt$ en unité de volume.

- Si on fait tourner autour de l'axe des abscisses la portion de C_f (la courbe de f) dont les abscisses des points sont comprises entre a et b $(a < b)$, alors le volume décrit par C_f est $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2dx$.

6.1.3. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition
Une équation différentielle est une équation faisant intervenir comme inconnue une fonction f et ses dérivées. L'inconnue f est en général notée y.
Equations différentielles du premier ordre

Soit a, b des nombres réels tels que $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{\frac{-b}{a}x}$, où k est une constante.

Equations différentielles du second ordre

Soit a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $ay'' + by' + cy = 0$ *(1)* une équation différentielle d'ordre 2.
Si son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet
- deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (1) sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où α et β sont des nombres réels.
- une racine double r_0, alors les solutions de (1) sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$f_{\alpha,\beta}(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ où α et β sont des nombres réels.
- deux racines complexes conjugués $u + iv$ et $u - iv$, alors les solutions de (1) sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$f_{\alpha,\beta}(x) = e^{ux}(\alpha cos vx + \beta sin vx)$ où α et β sont des nombres réels.

6.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x^4-2x^2+ x-1$. 2) $f(x) = sinx\,cos^3x$.

3) $f(t) = sin(\omega t + \varphi)$. 4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^3}$. 5) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x-2}$.

6) $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{(x+1)^2}$. 7) $f(x) = \frac{lnx}{x}$. 8) $f(x) = e^{-3x+1}$.

9) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. 10) $f(x) = \frac{1}{xlnx}$.

Exercice 2

1. Soit $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

2. Soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}$.

a) Sur quel intervalle g admet-elle des primitives ?

b) Déterminer la primitive de g qui prend la valeur 4 en 2.

3. Soit $h(x) = \frac{1}{x}$.

a) Déterminer un intervalle I sur lequel h admet des primitives.

b) Préciser dans ce cas l'ensemble des primitives de h sur I.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$. 2) $\int_2^1 3xe^{x^2-1}\, dx$. 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\, sin^2 x\, dx$.

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 tanu\, du$. 5) $\int_{-1}^2 |1-x|\, dx$.

Exercice 4

1. Calculer à l'aide d'une (ou d'une double) intégration par parties les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$. b) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

c) $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. d) $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$.

2. Déterminer les primitives de *f* dans les cas suivants :

a) $f(x) = \ln x$ sur $[1 ; +\infty[$. b) $f(x) = (x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 5</u>

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \cos x$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal d'unités 2 et 3 cm.

1. Calculer en cm^2, l'aire du domaine D limité par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{3\pi}{4}$.

2. Soit la fonction *g* définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Montrer que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

<u>Exercice 6</u>

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

1. Déterminer le volume d'une boule de rayon R.

2. Soit la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{x}$ où $1 \leq x \leq 4$.

Calculer le volume de la figure obtenue en faisant tourner (C) autour de l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$.

<u>Exercice 7</u>

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) 2y'-3y = 0. b) $y' = \frac{-1}{3}y$. c) y''+ y'- 6y = 0.

2. Résoudre les équations différentielles vérifiant les conditions posées :

a) y'+ 2y = 0 ; y(-1) = 2 .

b) y''+ 4y'+ 4y = 0 ; y(0) = 1 et y'(0) = 1.

c) y''- 2y'+ 5y = 0 ; y(π) = 1 et y'(π) = 0.

Exercice 8

1. Déterminer *f* la solution de l'équation différentielle y''- 2y'+ y = 0 , vérifiant *f(0) = 1* et *f '(0) = 3*.
2. En déduire *F* une primitive de *f*.
3. Vérifier que la fonction *F* trouvée est une primitive de *f*.

Exercice 9

Soit l'équation différentielle (E) : *y'+ y = cosx*

1. Déterminer les réels *p* et *q* tels que *h(x) = pcosx + qsinx* soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E') : *y'+ y = 0.*
3. Montrer que *g* est solution de (E) si et seulement si *g – h* est solution de (E').
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer *f* la solution de (E) dont la courbe passe par A(0 ; 1).

6.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 10

Soit les fonctions f, g et h définies par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $g(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ et $h(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d, e, α et β tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$, $g(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x-2}$ et $h(x) = \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x+1}$.

2. En déduire l'ensemble des primitives de f, de g et de h.

.**Exercice 11**

Soit la fonction f définie par $f(x) = cos^4 x + sin^2 x$.

1. Linéariser $f(x)$.

2. En déduire la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 12

Soit les fonctions f et g définies sur]-1 ; + ∞[par

$f(x) = x\ln(x+1)$ et $g(x) = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$.

Montrer que g est une primitive de f sur]-1 ; + ∞[.

Exercice 13

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = cos^2 x cos2x$ et $g(x) = sin^2 x cos2x$.

1. Montrer que $f(x) + g(x) = cos2x$ et $f(x) - g(x) = cos^2 2x$.

2. En déduire une nouvelle expression de $f(x)$ et $g(x)$.

3. Déterminer des résultats précédents l'ensemble des primitives F de f et G de g.

Exercice 14

On pose I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 cos^2 x\, dx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 sin^2 x\, dx$.

1. Calculer I + J.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties I – J.
3. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 15

Soit la suite u définie par $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} sinx\, dx$.

1. Calculer U_n à l'aide d'une double intégration par parties.
2. On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$; calculer la limite de S_n.

Exercice 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{1-x}$ et (C) sa courbe.

1. Etudier f et tracer sa courbe (C).
2. Utiliser une intégration par parties pour calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)\, dx$. Quelle est l'interprétation géométrique de I_1 ?
3. Pour tout n ≥ 1, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$.

a) Montrer que $\forall\, x \in [0\ ;\ 1]$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

b) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et étudier la convergence de (I_n).

c) Utiliser une intégration par parties pour montrer que $\forall\, n \geq 1$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Exercice 17

Soit f l'application de]-1 ; + ∞[vers ℝ définie par $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

1. Justifier l'existence de f et déterminer sa dérivée.

En déduire le sens de variation de f.

2. Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}$.

a) Montrer que $U_{n+1} = U_n + \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+t^3}$ et en déduire que U est croissante.

b) Démontrer que $U_1 \leq 1$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x^2$ et (C) sa courbe.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}.

2. Calculer l'aire du domaine définie par l'ensemble des points $\{M(x\ ;y),\ 0 \leq x \leq 1\ et\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x)\}$.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x^2e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}\,)$ avec $\|\vec{i}\,\| = \|\vec{j}\,\| = 2cm$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C).

2. Soit g la restriction de f à $[0\ ;\ 2]$; montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} et construire (C') sa courbe.

3. λ étant un réel strictement positif, on pose $I(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx$.

a)Interpréter graphiquement $I(\lambda)$.

b) Calculer $I(\lambda)$ en procédant à une intégration par parties.

c) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

4. On pose $\lambda = 2$.

a) Calculer $I(2)$.

b) En déduire la valeur en cm^2 de l'aire du domaine limité par (C') et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = \frac{4}{e^2}$.

Exercice 20

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Résoudre l'équation différentielle $(1+ \cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0$.

Exercice 21

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.

2. Trouver f la solution particulière de cette équation dont la courbe (C) passe par le point A(0 ; 4) et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

Exercice 22

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 6y = 0$.
2. Soit (E') l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = -6x - 1$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E').
3. a) Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E).
b) En déduire l'ensemble des solutions de (E').
c) Déterminer la solution f de (E') telle que $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

Exercice 23

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y' + y = x^2 + x$.
1. Déterminer g un polynôme de degré de 2, solution de (E).
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de
(E') : $y' + y = 0$.
3. Résoudre (E') et en déduire sur $\mathbb{R}$ les solutions de (E).

Chapitre 7 : DENOMBREMENT- PROBABILITE

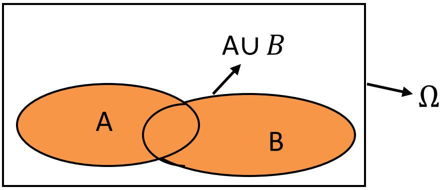
7.1. RESUME DU COURS

7.1.1. DENOMBREMENT

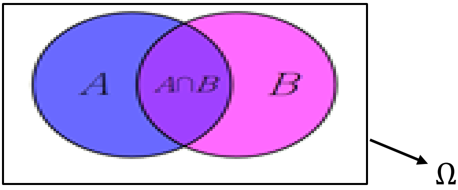
Réunion – intersection – complémentaire

Soit A et B deux parties d'un ensemble Ω.

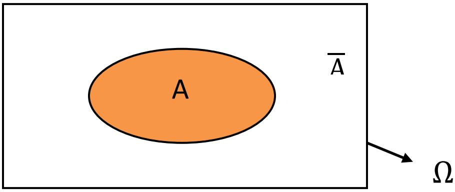
- La réunion de A et B, notée A∪B est la partie de Ω constituée des éléments qui sont dans A ou dans B.



- L'intersection de A et B, notée A∩B est la partie de Ω constituée des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.



- Le complémentaire de A dans Ω, notée $\bar{A}$ est la partie de Ω constituée des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.



Propriétés des cardinaux

Soit A et B des parties d'un ensemble fini Ω.

- card$A \cup B$ = cardA + cardB - card $A \cap B$.
- cardA = card Ω - card$\bar{A}$.

Les p-listes

- **Définition :** Une p-liste ou p-uplet d'un ensemble fini Ω est une suite ordonnée de p éléments de Ω, chaque élément pouvant être répété.
- **Exemple :** Soit Ω = {a, b, c}. les 2-listes de Ω sont (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b) et (c, c).
- **Théorème :** Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

Les arrangements

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments.

- **Définition :** Un arrangement de p éléments de Ω ($p \leq n$) ou un p-arrangement est une p-liste d'éléments de Ω, distincts deux à deux.
- **Exemple :** Soit Ω = {a, b, c}. les arrangements de 2 éléments de Ω sont (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a) et (c, b).
- **Théorème :** Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \leq n$) est noté A_n^p ;

A_n^p = n(n-1) x…x(n- p+1).

Les permutations

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments.

- **Définition :** Une permutation de Ω est un arrangement des n éléments de Ω.

- **Exemple :** Soit Ω = {a, b, c}. Les permutations de Ω sont : (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) et (c, b, a).
- **Théorème :** Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est noté n!;

n! = n(n-1) x…x2x1.

Par convention : 0! = 1.

Les combinaisons

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments.

- **Définition :** Une combinaison de p éléments de Ω ($p \leq n$) est une partie de Ω ayant p éléments.
- **Exemple :** Soit Ω = {a, b, c}. les combinaisons de 2 éléments de Ω sont {a, b}, {a, c} et {b, c}
- **Théorème :** Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \leq n$) est noté C_n^p ; $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$.

Propriétés des A_n^p et des C_n^p

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$; $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$.
- $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$; $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$ ($n \geq 1$) ;

  $C_n^n = 1$; $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Remarque : L'écriture de A_n^p comporte p facteurs ; pour calculer A_n^p, on écrit n, puis les facteurs suivants en retranchant chaque fois 1, jusqu'à ce qu'on l'on ait écrit p facteurs.

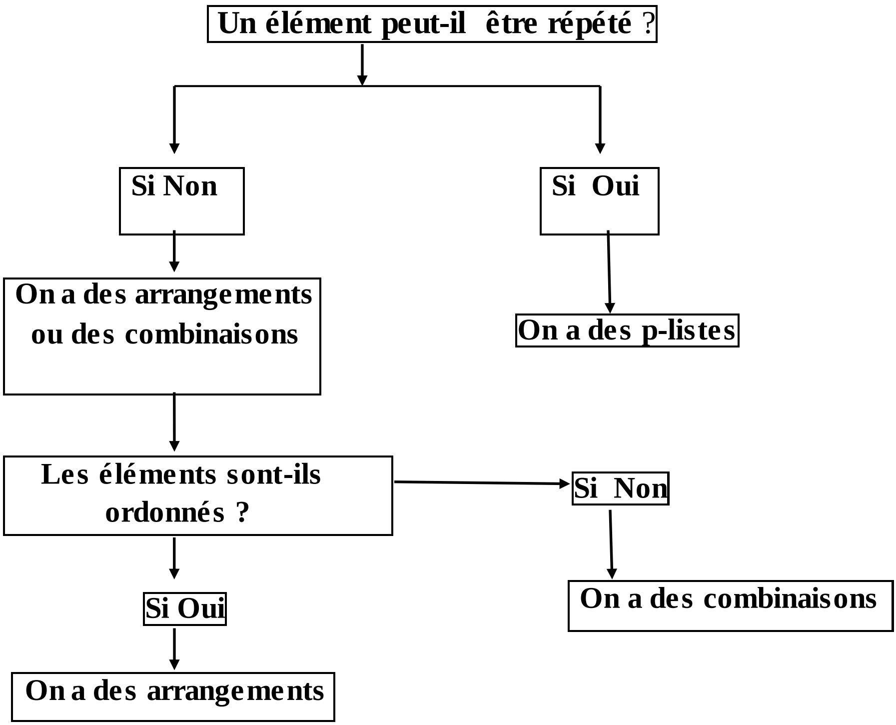
Différence entre une p-liste, un arrangement et une combinaison

Dans un exercice de dénombrement

- Si un élément peut être répété, alors on a des p-listes.
- Sinon on a des arrangements ou des combinaisons

- Si l'ordre des éléments est pris en compte, alors on a des arrangements.
- Sinon on a des combinaisons.

Autrement : En traitant un exercice de dénombrement, pour savoir si on a des p-listes, des arrangements ou des combinaisons, on peut se poser ces questions ?



<u>Les Tirages</u>

- Si le tirage est successif avec remise, on a des p-listes.
- Si le tirage est successif sans remise, on a des arrangements.
- Si le tirage est simultané, on a des combinaisons.

Vocabulaire

- « Au moins » correspond à l'inégalité « $\geq$ » ; sa négation est « moins de » et correspond à l'inégalité « $<$ ».
- « Au plus » correspond à l'inégalité « $\leq$ » ; sa négation est « plus de » et correspond à l'inégalité « $>$ ».
- Si A = « Au moins une boule noire (par exemple) » alors $\overline{A}$ = « moins d'une boule noire » = « pas de boule noire ».

Principe multiplicatif – principe additif

- Si une expérience A résulte de deux actions indépendantes et successives B puis C, alors on a multiplication. C'est-à-dire cardA = cardB x cardC.
- Si une expérience A résulte de deux actions disjointes B ou C, alors on a une addition. C'est-à-dire cardA = cardB + cardC.

Formule du binôme de Newton

Soit a, b des réels et n un entier naturel non nul ;
$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} b^p$.

7.1.2. PROBABILITES SIMPLES

Vocabulaire

- Une expérience aléatoire est une épreuve dont l'issue ne peut être déterminée avant sa réalisation.
- L'ensemble de toutes les éventualités ou possibilités d'une expérience aléatoire est appelé univers et est en général noté Ω.
- Toute partie de l'univers Ω est appelé événement.

- Un événement élémentaire est un événement ayant un élément.
- Deux événements A et B sont disjoints ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- Les événements A et $\bar{A}$ sont disjoints et $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Définition

p est une probabilité sur Ω signifie que :

- $p(\Omega) = 1$, $p(\emptyset) = 0$
- pour tout événement A de Ω, $0 \leq p(A) \leq 1$.
- si $A = \{e_1, \ e_2, \ldots \ e_n\}$ où les e_i sont des événements élémentaires, alors $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\{ e_i\})$

Propriétés

Soit A et B deux événements de Ω

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si A et B sont disjoints alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- $p(A) = 1- p(\bar{A})$.

Equiprobabilité

- **Définition :** Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires e_i ont la même probabilité alors il y a équiprobabilité.
- **Théorème :** Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$.

Cas de non équiprobabilité

Dans ce cas les événements élémentaires e_i n'ont pas la même probabilité.
Ces probabilités p_i = p(e_i) seront données de manière explicite ou à travers une ou plusieurs relations qui permettront de les calculer.
Pour ce calcul, on exprime chaque probabilité p_i en fonction de p_1 (par exemple) et on utilise l'égalité $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ pour déterminer p_1.
Ensuite on en déduit toutes les probabilités p_i qui permettront de calculer la probabilité d'événements quelconques.

7.1.3. PROBABILITES CONDITIONNELLES

Définition

Soit A et B deux événements tels que p(A) $\neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé est p(B/A) = $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

p(B/A) est aussi notée $p_A(B)$.

Propriété

Soit A et B deux événements tels que p(A) $\neq 0$ et p(B) $\neq 0$.
p(A$\cap B$) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B).

Evénements indépendants

- **Définition :** Les événements A et B sont indépendants si p(B/A) = p(B) ou p(A/B) = p(A).
- **Théorème :** Deux événements A et B sont indépendants ssi p(A$\cap B$) = p(A)p(B).

Attention

Il ne faut pas confondre événements disjoints et événements indépendants.

Formule des probabilités totales

Soit A et B deux événements de Ω.

A = A∩ Ω = A∩(B∪ $\bar{B}$) = (A∩B)∪(A∩ $\bar{B}$).

- **Théorème 1:**

p(A) = p(A∩B) + p(A∩ $\bar{B}$) = p(B)p(A/B) + p($\bar{B}$)p(A/$\bar{B}$).

- **Théorème 2 :** De manière générale si

Ω = $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ et si les A_i sont disjoints deux à deux alors

p(A) = $p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) + \ldots + p(A \cap A_n)$

= p(A_1)p(A/A_1) + p(A_2)p(A/A_2) + … + p(A_n)p(A/A_n) .

7.1.4. VARIABLES ALEATOIRES

Définition

Une variable aléatoire est une application notée X en général, qui à tout résultat d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel.

Exemple

- On lance trois fois de suite une pièce de monnaie.

L'application X qui à tout résultat obtenu, on associe le nombre de fois que « pile » apparait est une variable aléatoire.

- Cette variable aléatoire prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3 ;

on les appelle valeurs prises par la variable aléatoire X.

- (X = 2) par exemple désigne l'événement

« pile est sortie 2 fois lors des trois lancers ».

Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire et x_1, x_2, ..., x_n les différentes valeurs prises par X. On appelle loi de probabilité l'application qui à x_i, $1 \leq i \leq n$, on associe p_i = p[(X= x_i)] la probabilité de l'événement (X= x_i).

Cette loi est présentée dans un tableau de la manière suivante :

x_i	x_1	x_2	- - - -	x_n
p_i	p_1	p_2	- - - - -	p_n

Remarque : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Espérance mathématique – variance – écart-type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et p_i = p[(X= x_i)], $1 \leq i \leq n$.

- L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.
- La variance de la variable aléatoire X est le réel positif $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [E(x)]^2$.
- L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques :

- Lorsque les valeurs prises par X sont des gains d'un jeu de hasard, alors E(X) traduit l'espérance de gain moyen par partie lorsqu'on joue.
- Un jeu équitable est un jeu où l'espérance de gain est nulle.
- Un jeu où l'espérance de gain est positive avantage le joueur, contrairement à un jeu ou l'espérance de gain est négative.

Fonction de répartition

- Soit x un réel, l'événement $(X \leq x)$ est la réunion des événements (X= x_i) pour les valeurs x_i, $x_i \leq x$.
- La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la

fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par F(x) = p(X ≤ x).

F est une fonction en escalier qu'on définit de la manière suivante :

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ étant les valeurs prises par X dans l'ordre croissant,

- si $x \in]-\infty; x_1[$ alors F(x) = 0.
- si $x \in [x_1 ; x_2[$ alors F(x) = p_1.
- si $x \in [x_2 ; x_3[$ alors F(x) = $p_1 + p_2$.
- …………………………………
- si $x \in [x_n : +\infty[$ alors F(x) = $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Loi binomiale

- **Définition 1:** Une épreuve de Bernouilli est une expérience aléatoire ayant exactement deux issues, l'une appelée en général « succès » et l'autre « échec ».
- **Définition 2:** On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p si X est la variable aléatoire définie par le nombre de succès obtenus en répétant n fois et de manière indépendante une épreuve de Bernouilli ; p désigne la probabilité d'un succès.
- **Théorème 1 :** Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors la probabilité d'obtenir exactement k succès ($0 \leq k \leq n$) est p[(X= k)] = $C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$.

- **Théorème 2 :** Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors l'espérance mathématique de X est E(X) = n.p et sa variance est V(X) = n.p(1-p).

7.2. EXERCICES D’APPLICATION

Exercice 1

10 délégués de classe se réunissent pour former le bureau du foyer.

1. Sachant qu'un bureau est composé de 3 membres, quel est le nombre de bureaux possibles ?

2. Sachant qu'un bureau est composé d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire, quel est le nombre de bureaux possibles

a) si l'on suppose qu'il n'y a pas de cumul ?

b) si l'on suppose qu'il y a cumul ?

Exercice 2

8 athlètes parmi lesquels Hussein Bolt, s'alignent pour la finale de 100 m des jeux olympiques. Sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo,

1. Quel est le nombre de podiums possibles ?

2 .Quel est le nombre de podiums dans lesquels

   a) Bolt est premier ?

   b) figure Bolt ?

Exercice 3

Dans un jeu de 32 cartes, combien de « mains » de 5 cartes peut-on avoir comportant :

1) Exactement 2 valets ? 2) 3 carreaux ?

3) Plus de 2 dames ? 4) Au moins un roi ?

Exercice 4

Une urne contient 5 boules rouges (BR), 3 boules blanches (BB) et 2 boules noires (BN).

A. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Quel est le nombre de tirages comportant :

a) 3BR ? b) 3BN ? c) 2BB et 1BN ?
d) 2BB ? e) Au moins 1BB ?
f) des boules de même couleur ? g) des boules tricolores ?
B. On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne.
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages comportant :
a) 3BR ? b) 3BN ? c) 2BB suivies d'une BN ?
d) 2BB et 1BN ? e) 2BB ? f) au moins 1BB ?
C. On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne. Répondre aux mêmes questions que dans (B).

Exercice 5

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :
1) le roi de trèfle. 2) un roi. 3) un trèfle.
4) un roi ou un trèfle. 5) ni roi, ni trèfle.

Exercice 6

On considère deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires. U_2 contient 5 boules blanches et une boule noire. L'expérience (E) consiste à tirer une boule dans chaque urne. Le tirage étant équiprobable, calculer la probabilité de tirer exactement :
1. a) deux boules blanches. b) deux boules noires.
c) une boule blanche et une boule noire.
2. On appelle A l'événement « les deux boules tirées sont de la même couleur ».
a) Démontrer que la probabilité de A est $\frac{17}{30}$.
b) On répète l'expérience (E) 5 fois de suite en ayant soin de remettre les boules tirées après chaque tirage dans leur urne

d'origine. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement A ?

c) On répète l'expérience (E) n fois de suite dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement A ?

d) Trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0{,}999$.

Exercice 7

On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1à 6 et on note p_i la probabilité de l'événement « le résultat du lancer est i »

1. Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sachant que $p_2= p_1$; $p_3= 3p_1$; $p_4= 2p_1$; $p_5= 2p_6$; $p_6= 2p_3$

2. Calculer la probabilité de l'événement « obtenir un numéro pair ».

3. On lance 5 fois de suite le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois un numéro pair.

Exercice 8

On répartit les élèves d'une classe de Terminale S selon le tableau suivant :

	Matheux	Non matheux
Garçons	3	15
Filles	2	10

1. Calculer la probabilité qu'un élève de la classe soit

a) un matheux. b) un garçon. c) un garçon et un matheux.

d) un matheux sachant qu'il est un garçon.

2. Les événements « être un garçon » et « être un matheux » sont ils indépendants ?

Exercice 9

Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60% d'une population à risque. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10% des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche 30% des individus non vaccinés ne sont pas malades.

1. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité

a) qu'elle soit malade sachant qu'elle est vaccinée ?

b) qu'elle soit malade et vacciné ?

c) qu'elle contracte la maladie ?

2. Calculer la probabilité qu'un individu bien portant soit vacciné.

Exercice 10

On dispose de 2 urnes U_1 et U_2. U_1 contient 4 boules blanches et 1 boule noire. U_2 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On choisit une urne au hasard, puis une boule dans l'urne choisie.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire :

a) sachant que l'urne choisie est U_1 ?

b) sachant que l'urne choisie est U_2 ?

2. En déduire la probabilité de tirer une boule noire.

Exercice 11

On jette deux dés ayant la forme d'un tétraèdre régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note X la somme des numéros obtenus.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Représenter la loi de probabilité de X.

2. a) Définir F la fonction de répartition de X.

b) Représenter F.

3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 12

Une urne contient 5 jetons blancs et 3 jetons rouges. Un jeu consiste à tirer simultanément 5 jetons de l'urne. Pour chaque jeton rouge tiré, le joueur gagne 100 francs et pour chaque jeton blanc tiré, il perd n francs ($n > 0$). Soit Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer en fonction de n, la loi de probabilité de Y.
2. Calculer en fonction de n, E(Y).
3. Déterminer n pour que le jeu soit équitable.

Exercice 13

Lors de l'épreuve du Bac d'Anglais, un candidat doit répondre à un QCM composé de 10 questions. Pour chacune d'elles il est proposé 4 réponses possibles, mais une seule est correcte. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des 10 questions.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat, à l'issue de ce QCM

a) trouve uniquement la première question.

b) obtienne exactement une réponse correcte.

2. Soit X la variable aléatoire qui à toute grille de réponses rendues par un candidat, associe le nombre k de réponses correctes.

a) Déterminer en fonction de k la probabilité qu'un candidat ait k réponses exactes.

b) calculer $p(X \leq 1)$ et en déduire $p(X \geq 2)$.

3. Calculer E(X).

A-t-on intérêt à répondre au hasard à ce QCM ?

7.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 14 **(Bac 2001)**

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :

A = « les deux nombres inscrits sont strictement inférieurs à 5 ».

B = « le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second ».

2. Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes, quelle est la probabilité pour qu'à l'issue de la $7^{ème}$ partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ? au moins une fois ?

Exercice 15 **(Bac 98)**

Une boite contient 5 jetons : 2 jetons noirs et 3 jetons blancs indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément au hasard 2 jetons de la boite :

a) Calculer la probabilité des événements suivants

E = « on extrait 2 jetons noirs »

F = « on extrait 2 jetons de même couleur »

b) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus.

Définir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. On effectue un tirage successif de 2 jetons de la boite de la manière suivante :

On tire un jeton de la boite ; on note sa couleur et on la remet dans la boite en ajoutant en plus dans la boite un autre jeton de la même couleur que celui qu'on a tiré ; on tire ensuite un second jeton de la boite.

Soit les événements suivants :

N_1 = « on obtient un jeton noir au premier tirage ».

N_2 = « on obtient un jeton noir au second tirage ».

B_1 = « on obtient un jeton blanc au premier tirage ».

a) - Calculer la probabilité de N_2 sachant N_1 : $p(N_2/N_1)$

- Puis la probabilité de N_2 sachant B_1 : $p(N_2/B_1)$

b) En déduire $p(N_2)$

Exercice 16 **(Bac 2010)**

Un tiroir contient pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a) Calculer la probabilité de l'événement

A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'événement

B : « tirer un pied gauche et un pied droit »

c) Montrer que la probabilité de l'événement

C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\frac{1}{19}$

2. On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3, 4.

b) Montrer que la loi de probabilité de X est :

$p(X = 2) = \frac{1}{6}$; $p(X = 3) = \frac{1}{3}$; $p(X = 4) = \frac{1}{2}$.

c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 17

3 machines A, B, C produisent respectivement 60%, 30% et 10% de la production des pièces fabriquées dans une usine. La machine A produit 2% de pièces défectueuses, B en produit 3% et C 4%. On choisit au hasard une pièce à la sortie de l'usine.

1. Quelle est la probabilité que la pièce

a) soit défectueuse sachant qu'elle est produite par A ?
b) soit défectueuse et produite par A ?
c) soit défectueuse ?
2. Une pièce prise au hasard est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de B ?

Exercice 18 **(Bac 2000)**

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note p_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$.

1. a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.
b) En déduire p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6.
2. On tire 3 fois de suite et avec remise un jeton de cette urne et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.
3. Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de probabilité de S.
b) On gagne à ce jeu lorsque $S \geq 4$. Déterminer la probabilité de gagner.

Exercice 19 **(Bac 2006)**

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution de (E).

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et $\sqrt{3}+1$. Placer ces points dans le repère et démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2. Résoudre l'équation différentielle : y''- 2y' + 2y = 0.

3. On considère l'équation différentielle (1) : ay''- by'+ cy = 0 où a, b et c désignent 3 paramètres, éléments de l'ensemble
{1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur de b et le troisième celle de c.

a) Justifier que l'équation différentielle (1) a pour solution les fonctions de la forme x → (Acosx + Bsinx) e^x, où A et B sont des réels si et seulement si 1 + i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en z, az^2- bz + c = 0.

b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme x → (Acosx + Bsinx) e^x, où A et B sont des constantes réelles.

<u>Exercice 20</u> **(Bac 2011)**

I. On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements. Dans le cas d'équiprobabilité rappeler les probabilités des événements suivants :

A, A sachant B, A∩ $\bar{B}$ et (A∩ $\bar{B}$)∪(A∩B).

II. Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'événement « La ville est délestée le n-ieme jour » et p_n la probabilité de l'événement D_n ; $p_n = p(D_n)$.

1. Montrer les égalités suivantes :

$p(D_1) = 1$; $p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$; $p(D_{n+1}/\overline{D_n}) = \frac{5}{6}$.

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p(D_{n+1} \cap \overline{D_n})$.

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{n+1} = \frac{-11}{18} p_n + \frac{5}{6}$.

4. On pose $U_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer U_n puis p_n en fonction de n.

c) Un match de football doit se jouer le $20^{\text{ième}}$ jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.

<u>Exercice 21</u> **(Bac 2007)**

1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note pi la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les p_i vérifient : $p_1= p_2$; $p_3= p_4= 2p_1$; $p_5= p_6= 3p_1$;

a) Montrer que $p_1= \frac{1}{12}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement

A : « obtenir 3 ou 6 » est égale à $\frac{5}{12}$.

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

-Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur la cible ; à 5m la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$.

-Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette ; à 7m, la cible est atteinte avec une probabilité égale à $\frac{2}{5}$.

On note C l'événement « la cible est atteinte ».

a) Déterminer p(C/A) et p(C/$\bar{A}$). En déduire que p(C) = $\frac{29}{60}$.

b) Déterminer p(A/C).

3. Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies. Calculer la probabilité pour qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

Chapitre 8 : SERIE STATISTIQUE DOUBLE

8.1. RESUME DU COURS

Définition

L'étude simultanée de deux caractères x et y d'une population donne une série statistique double.

8.1.1. SERIE STATISTIQUE DOUBLE

Définition

Soit x et y deux caractères observés sur une population, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les valeurs prises par x et $y_1, y_2, \ldots, y_q$ les valeurs prises par y ; soit n_{ij} le nombre de fois qu'on observe le couple $(x_i, y_j)_{1 \le i \le p \text{ et } 1 \le j \le q}$ dans la population.

- n_{ij} est appelé effectif du couple (x_i, y_j).
- $\{(x_i, y_j, n_{ij})\}_{1 \le i \le p \text{ et } 1 \le j \le q}$ est appelée série statistique double.

Exemple

L'étude simultanée des notes de sciences physiques(x) et de mathématiques (y) de 11 élèves d'une classe de Terminale S1 donne les résultats suivants, présentés dans le tableau à double entrée ci-dessous appelé tableau de contingence ou de corrélation:

y / x	**10**	**12**	**15**	**18**	**Totaux**
11	1	2	1	0	$n_{1\,.} = ..$
15	2	3	1	0	$n_{2\,.} = ..$
19	0	0	0	1	$n_{3\,.} = ..$
Totaux	$n_{.\,1}= ..$	$n_{.\,2}= ..$	$n_{.\,3}= ..$	$n_{.\,4}= ..$	N= 11

- Le nombre 2 se trouvant dans la case grisée signifie que 2 élèves ont obtenu 11 en Sciences physiques et 12 en Maths.
- Effectifs partiels

$n_{1\,.} = n_{1\,1} + n_{12.} + n_{1\,3} + n_{1\,4}$

= 1+ 2+ 1+ 0 = 4 ; c'est le nombre d'élèves ayant obtenu 11 en Sciences Physiques.

$n_{2\,.} = n_{2\,1} + n_{22.} + n_{2\,3} + n_{2\,4}$

= 2 + 3+ 1+ 0 = 6 ; c'est le nombre d'élèves ayant obtenu 12 en Sciences Physiques.

$n_{.1} = n_{11} + n_{21} + n_{31}$

= 1 + 2 + 0 = 3 ; c'est le nombre d'élèves ayant obtenu 10 en Mathématiques.

$n_{.\,4} = n_{1\,4} + n_{2\,4} + n_{3\,4} + n_{1\,4}$

= 0 + 0 + 1 = 1 ; c'est le nombre d'élèves ayant obtenu 18 en Mathématiques.

Effectifs partiels – Effectif total

- $n_{i\,.} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$; $n_{.\,j} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$
- L'effectif total N = $\sum_{i=1}^{p} n_{i\,.} = \sum_{j=1}^{q} n_{.j}$
  $= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$

Fréquences

- $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$; $f_{i\,.} = \frac{n_{i\,.}}{N}$; $f_{.j} = \frac{n_{.j}}{N}$.
- Fréquences conditionnelles : $f_{x_i/y_j} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}}$; $f_{y_j/x_i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\,.}}$

Série statistique marginale

- La série statistique simple$\{(x_i, n_{i\,.})\}_{1 \leq i \leq p}$, appelée

première série statistique marginale est présentée à l'aide du tableau ci-dessous :

x	x_1	x_2	------------------	x_p
$n_{i\,.}$	$n_{1\,.}$	$n_{2\,.}$	------------------	$n_{p\,.}$

Cette série a pour moyenne $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_{i\,.} x_i$, pour variance V(x) = $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_{i\,.} x_i^2 - \bar{x}^2$ et pour écart-type σ(x) = $\sqrt{V(x)}$.

- La série statistique simple$\{(y_j, n_{.j})\}_{1 \leq j \leq q}$, appelée

deuxième série statistique marginale est présentée à l'aide du tableau ci-dessous :

y	y_1	y_2	------------------	y_q
$n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	....	$n_{.q}$

Cette série a pour moyenne $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{q} n_{.j} y_j$, pour variance V(y) $= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{q} n_{.j} y_j^2 - \bar{y}^2$ et pour écart-type σ(y) = $\sqrt{V(y)}$.

Covariance de x et y

La covariance de x et y est

cov(x, y) = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\, x_i y_j - \bar{x}\,.\bar{y}$.

Représentation graphique

- Pour représenter la série double $\{(x_i, y_j, n_{ij})\}_{1\leq i\leq p \text{ et } 1\leq j\leq q}$, on place dans un repère orthogonal les x_i en abscisse et les y_j en ordonnée. Le triplet (x_i, y_j, n_{ij}) est représenté dans le repère par le point pondéré $M_{ij}(n_{ij})$ de coordonnées $(x_i,\ y_j)$. L'ensemble des points $M_{ij}(n_{ij})$ constitue la représentation graphique de la série ; cette représentation est appelée nuage de points.
- On appelle point-moyen du nuage de points, le barycentre G des points pondérés $M_{ij}(n_{ij})$.

8.1.2. CAS PARTICULIER : SERIE DOUBLE INJECTIVE

Définition

Si les caractères *x* et *y* prennent le même nombre de valeurs (p = q= n) et si $n_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ i = j \\ 0\ si\ i \neq j \end{cases}$ alors la série double est dite injective ; elle est notée $\{\{(x_i,\ y_i)\}_{1\leq i\leq n}$ et ces résultats sont présentés dans un tableau de cette forme :

x	x_1	x_2	------------------	x_n
y	y_1	y_2	------------------	y_n

Effectif total

L'effectif total N de la série est égal au nombre de colonnes du tableau ou bien au nombre de valeurs du caractère x ou du caractère y.

Série marginale

- La première série marginale $\{(x_i, n_i)\}_{1\leq i\leq n}$ a pour

moyenne $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$, pour variance V(x) = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} {x^2}_i$ - $\bar{x}^2$ et pour écart-type σ(x) = $\sqrt{V(x)}$.

- La deuxième série marginale $\{(y_i, n_i)\}_{1\leq i\leq n}$ a pour

moyenne $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i$, pour variance V(y) = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} {y^2}_i$ - $\bar{y}^2$ et pour écart-type σ(y) = $\sqrt{V(y)}$.

Covariance

La covariance de x et y est cov(x, y) = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ - $\bar{x}\ \bar{y}$.

Représentation graphique

- Le couple (x_i, y_i) est représenté dans un repère

orthogonal par le point $M_i(x_i, y_i)$. L'ensemble des points M_i constitue le nuage de points de la série double.

- Le point G de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ est le point-moyen du

nuage.

Ajustement linéaire

Si les points du nuage ont l'allure d'une droite, on peut trouver une droite « trés proche » de ces points.

Par la méthode des moindres carrés on trouve deux droites, l'une appelée droite de régression de y en x, notée $d_{y/x}$ et l'autre appelée droite de régression de x en y, notée $d_{x/y}$.

Equations des droites de régression

- $d_{y/x}$: $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ où $a = \frac{cov(x, y)}{V(x)}$.
- $d_{x/y}$: $x - \bar{x} = \alpha(y - \bar{y})$ où $\alpha = \frac{cov(x, y)}{V(y)}$.

Remarque :

Les droites de régression passent par le point-moyen $G(\bar{x}, \bar{y})$.

Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire des caractères x et y est

$r = \frac{cov(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$.

Remarques :

- $r^2 = \alpha a$; $-1 \leq r \leq 1$.
- Si $|r|$ très proche de 1, on a une bonne ou forte corrélation entre les caractères x et y.

Estimation

Pour estimer la valeur de y (respectivement x) connaissant celle de x (respectivement y) on remplace x (respectivement y) par sa valeur dans l'une des équations des droites de régression.

8.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Dans cet exercice, on donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnés à 10^{-2} prés.

Le tableau ci-dessous donne *y* le taux de réussite au Bac en pourcentage de 2006 à 2010 d'un lycée du Sénégal.

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x	1	2	3	4	5
y	27,6	34,8	37,2	35,6	43

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique.
2. Déterminer le coefficient de corrélation r et interpréter le résultat.
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x et la tracer.
4. Estimer le taux de réussite au Bac de ce lycée en 2014.

Exercice 2 : (Bac 2008)

Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des 20 naissances d'une journée, l'âge x de la mère (en années) et le poids y du nouveau-né (en kilogrammes). Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

y \ x	16	18	20	22	26	Totaux
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Totaux	1	5	4	6	4	20

Donner les formules avant d'effectuer les calculs puis les réponses à 10^{-2} prés par défaut.

1. Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
2. Déterminer les moyennes et écart-types respectifs de ces séries marginales.
3. Déterminer le coefficient de corrélation de x et y. La corrélation est-elle bonne ?

<u>Exercice 3</u> **(Bac 2006)**

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Une étude du service des transports donne la distance de freinage (Y en mètre) d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse (X en km/h).

X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

1. Représenter le nuage de points (on commencera en abscisse les graduations à partir de 40km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8m).
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

4. a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera –t-il l'obstacle ?

b) Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

B. Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport :Y / Cause des accidents :X	Particuliers y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse : x_1	440	360
Accidents à cause mécanique : x_2	110	90

1. Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de cette étude.
2. Déterminer les fréquences conditionnelles f_{y_2/x_1} et f_{x_2/y_2} .
3. Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ et $f_{2.}$

8.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 4 **(Bac 1999)**

L'étude du poids P de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'âge X a conduit au tableau suivant :

X (mois)	1	2	3	4	5
P (mg)	7	13	25	47	88

1. On pose Y = *lnP* où *ln* désigne le logarithme népérien.

a) Calculer les différentes valeurs prises par Y à 10^{-2} prés.

b) Tracer le nuage de points représentant les couples (X, Y) dans un système d'axes orthonormés (unité 2cm); y placer le barycentre G du nuage.

2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.

3. Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois.

Exercice 5

Soit la série statistique double suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	25	41	k	69	80	86

1. Calculer $\bar{x}$ puis $\bar{y}$ en fonction de k .

2. Déterminer la valeur de k sachant que la droite de régression de x en y est $d_{x/y}$: $x = 0{,}075y - 0{,}9$.

3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série.

Exercice 6 **(Bac 2002)**

63 candidats se sont présentés au Baccalauréat comportant une épreuve de Maths et une épreuve de Sciences physiques : SP.

On appelle X = (x_i) la série statistique des notes de Sciences Physiques et Y = (y_i) la série des notes de Mathématiques.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné :

Note en Math / Note en SP	2	6	10	14	18	Totaux
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

1. Déterminer pour chaque x_i la moyenne z_i de la série conditionnelle y/x_i.

2. On considère la série double (x_i, z_i).

a) Dans le repère orthonormé, construire le nuage de points M(x_i, z_i).

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série
X = (x_i) et Z = (z_i).

c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Z en X par la méthode des moindres carrés.

d) Tracer cette droite.

Exercice 7 : (Bac 2005)

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle x la variable statistique dont les valeurs sont x_i et y celle dont les valeurs sont les y_i.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y et x. La valeur trouvée justifie t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

3. Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs.

a) Déduire de la précédente question que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité

$z = -5{,}95x^2+1426{,}25x-59937{,}5$ où x et z sont exprimés milliers de francs.

b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

<u>N.B</u> : Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

<u>Rappel</u> : Bénéfice = Prix de vente – prix de revient.

PROBLEMES D'ENTRAINEMENT TYPE DE BACCALAUREAT

<u>Problème 1</u> **(Bac 2001)**

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x(1 - lnx)^2 \ si \ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(où lnx désigne le logarithme népérien de x) et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

b) Etudier les variations de g.

c) Tracer (C).

2. a) Soit α un réel appartenant à l'intervalle]0 ; e[. Calculer à l'aide de deux intégrations par parties, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = e$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

3. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (Δ) : $y = x$.

b) Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_m) : $y = mx$ recoupe –t-elle la courbe (C) en deux points M_1 et M_2 autres que O ?

c) La droite (Δ_m) coupe la droite (D) d'équation x = e en P. Montrer que $OM_1.OM_2 = OP^2$.

4. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle [e ; +∞[admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est elle dérivable ?

Calculer $h(e^2)$; en déduire $(h^{-1})'(e^2)$.

c) Construire la courbe de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

<u>Problème 2</u> **(Bac 2006)**

I.On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1 + e^{2x})$. On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité : 2cm)

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 + (1 - x)\, e^{2x}$.

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b) En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de (C) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

3. a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

c) f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire (C) (on tracera la tangente à (C) au point d'abscisse 2).

f) Construire (C') la courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

II. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = 0$ *et* $x = \lambda$ et les courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = x$. Soit $a(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm^2.

1. Calculer $a(\lambda)$ en fonction de λ.

2. Déterminer $a = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

<u>Problème 3</u> **(Bac 2000)**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \ si\ x < 0 \\ f(x) = xln(1+x)\ si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$) (unité graphique 2 cm). On désigne par (C) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

<u>Partie A</u>

1.a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2. a) Montrer que pour $x < 0$, on a $f\ '(x) > 0$.

b) Etudier les variations de $f\ '$ sur $[0\ ; +\infty[$.

En déduire que pour $x > 0$, $f\ '(x) > 0$.

c) Donner le tableau de variation de f.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ (on pourra poser $u = \frac{1}{x}$).

b) Montrer que (D) : $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. On admettra que (C) est en dessous de (D).

4. a) Construire (C). On précisera les coordonnées de I, point d'intersection de (C) et (Δ) pour $x > 0$.

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C) en $+\infty$.

<u>Partie B</u>

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+$
$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2. En déduire au moyen d'une intégration par parties que la fonction F telle que $F(x) = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limité par (Δ), (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = e - 1$.

Partie C

1. a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}.

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe de f^{-1}.

2. Construire (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Déduire du B.3) l'aire du domaine ($\mathfrak{D}$) ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq e-1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$.

Problème 4 **(Bac 2005)**

Partie A

Soit f la fonction de la variable x définie par

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

1. a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$. Que peut-on déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe.
(unité : 2cm)

c) Montrer que f réalise une bijection de]-∞,+∞[sur]-∞,0[.

2. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par :
$g(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

a) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que quel que soit le réel x, $g'(x) = e^{-x}.f(x)$.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

d) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

3. a) Montrer que $\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) A tout réel λ, on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} g(x)dx$. Justifier l'existence de $I(\lambda)$. Calculer $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

Partie B

1. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

2. a) Calculer g(0).

b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point ln2.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse ln2.

Problème 5 **(Bac 2003)**

A. On considère la fonction $u : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u. Calculer u(0) et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.

2. Etudier les variations de u.

Dresser son tableau de variation (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3. Déduire des résultats précédents que

a) $\forall x \in [0; 1[$, $u(x) \geq 0$.

b) $\forall x \in [1; +\infty[$, $u(x) < 0$.

B. Soit g la fonction définie par $g : [0\ ;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1 .$$

1. Déterminer Dg (le domaine de définition de g), puis étudier la limite de g en 1.

2. a) Vérifier que $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0\ ;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement d'ordre 1 de α.

3. Tracer la courbe Cg de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2cm).

C. Soit $f : [0\ ;1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;1[$ et que $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in [0;1[$.

2. Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe Cg, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

SUJETS TYPE
DE BACCALAUREAT

1. EPREUVES DU PREMIER GROUPE

1.1. BAC 1999

Exercice I **(05 points)**

On considère le plan (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $-z^3 + 6z - 20i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure a.

2. Notons b *et* c les autres solutions de (E), b ayant la partie réelle positive et soient A, B, C les points d'affixes respectives a, b, c. Déterminer le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad ; et f l'application qui à tout point M de (P) d'affixe $z \neq i - \sqrt{3}$ associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-2i}{z+\sqrt{3}-i}$.

a) Donner l'écriture complexe de r puis l'affixe du point A' = r(A).

b) Déterminer (E), l'ensemble des points M de (P) dont les images par f ont pour affixe un réel négatif.

c) Déterminer (F), l'ensemble des points M de (P) dont les images par r appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice II **(04 points)**

Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiaire d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires). On note X la quantité, en tonnes, de matières premières ; Y le chiffre d'affaires en milliers de francs ; Z le total des salaires en milliers de francs. Le relevé des 6 mois précédents est le suivant :

Numéro du mois	1	2	3	4	5	6
X	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
Y	37	40	33	33	41	35
Z	3,9	3,7	3,2	3,3	3,6	3,7

1.a) Calculer les coefficients de corrélation linéaire r_1 entre X et Y et r_2 entre X et Z.

b) Est-ce un ajustement entre Y et X ou entre Z et X qui permettra la meilleure estimation de X ?

2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et en déduire une estimation du besoin en matières premières pour Y = 39.

Problème **(11 points)**

Partie A

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \ si\ x \in]-\infty; 0[\\ f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \quad si\ x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}.$$

Soit (C) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2cm).

1. Etudier la continuité de f en 0.

2. a) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) En déduire que (C) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.

3. Etudier les variations de f.

4. Tracer la courbe (C).

<u>Partie B</u>

Soit g la restriction de f à $]1\,;+\infty[$.

1. Montrer que g est une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. On notera g^{-1} la bijection réciproque de g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une solution α sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ (on ne demande pas de calculer α).

3. Montrer que pour tout $x \in$ J, $g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x-1}$.

4. Tracer dans le repère précédent la courbe de g^{-1}.

5. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ défini par $-\ln 7 \leq x \leq -1$ et $0 \leq y \leq g^{-1}(x)$.

1.2. BAC 2008

<u>Exercice 1</u> **(05 points)**

1. Soit l'équation

(E) : $z^3 + (-6-4i)\,z^2 + (12+21i)z + 9 - 45i = 0$.

a) Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E). **(01pt)**

b) Achever la résolution de (E). **(01pt)**

(on appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution).

2. Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé

(O, $\vec{u}, \vec{v}$). On considère les points A, B et C d'affixes respectives 3i, 3+3i et 3-2i.

a) Placer les points A, B et C dans le repère. **(0,5pt)**

b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature de ABC. **(01,5pt)**

3. Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

a) Donner une écriture complexe de f. **(0,5pt)**

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de f. **(0,5pt)**

<u>Exercice 2</u> **(05 points)**

1. Soient les équations différentielles (E_0) : y'+ y = 0,

(E) : y'+ y = $e^{-x}cosx$ et la fonction h,

h(x) = (acosx + bsinx) e^{-x}.

a) Trouver les réels a et b pour que h soit solution de (E). **(0,5pt)**

b) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f – h est solution de (E_0). **(0,5pt)**

c) Résoudre (E_0). **(0,5pt)**

d) Déduire des questions précédentes les solutions de (E). **(0,5pt)**

e) Déterminer la solution g de (E) telle que g(0) = 0. **(0,5pt)**

2. Soit L la fonction définie par L(x) = $e^{-x}sinx$.

a) Exprimer cos($x + \frac{\pi}{4}$) en fonction de cos$x$ et sin$x$. **(0,5pt)**

b) Etudier les variations de L sur [0 ; 2π]. **(01,5pt)**

c) Calculer I = $\int_0^{2\pi} L(x)\,dx$. **(0,5pt)**

<u>Exercice 3</u> **(05,5 points)**

On dispose de 3 urnes U_1, U_2 et U_3. U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges. U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes. U_3 contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1.

- Si elle est verte on la met dans U_2, puis on tire une boule dans U_2.
- Si elle est rouge, on la met dans U_3, puis on tire une boule dans U_3.

A)

1. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte. **(0,5pt)**
2. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première est rouge. **(0,5pt)**
3. En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage. **(01pt)**
4. Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au deuxième tirage. **(0,5pt)**
5. Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage. **(0,5pt)**

B) Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :

- une boule verte, on gagne 1000 F.
- une boule jaune, on gagne 500 F.
- une boule rouge, on perd 500 F.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. **(0,5pt)**
2. Calculer l'espérance mathématique de X. **(0,5pt)**

C) Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. Les résultats seront donnés au centième près par défaut.

1. Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au deuxième tirage. **(0,5pt)**

2. Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au deuxième tirage. **(0,5pt)**

3. Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève ait une boule verte au second tirage. **(0,5pt)**

<u>Exercice 4</u> **(04,5 points)**

Dans cet exercice, le détail des calculs n'est pas exigé. On donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnés à 10^{-1} près. Le tableau ci-dessus donne le poids moyen *(y)* d'un enfant en fonction de son âge (x).

x(années)	0	1	2	4	7	11	12
y(kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1. Représenter le nuage de points de cette série dans un repère orthogonal. (unité graphique : en abscisse 1cm pour 1année et en ordonnée 1 cm pour 2 kg) **(01pt)**

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G et placer G. **(0,5pt)**

3. a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. **(0,5pt)**

b) Interpréter votre résultat. **(0,5pt)**

4. Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x. Tracer (D). **(0,5+0,5pt)**

5. a) Déterminer graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15 kg. Expliciter votre raisonnement. **(0,5pt)**

b) Retrouver ce résultat par le calcul. **(0,5pt)**

1.3. BAC 2009

Exercice I **(03 Points)**

1. (X, Y) est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression et (D_2) la droite de régression de X enY. On suppose que $(D_1) : y = ax + b$, $(D_2) : x = a'y + b'$ et que r est le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Etablir que $r^2 = aa'$. **(01 point)**

2. Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :

- la droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4x - y = 0$
- la droite de régression de X en Y a pour équation :

$3,5y - 9x + 24 = 0$

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive. **(0,5 point)**

b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y.

(0,75+0,75 points)

Exercice II **(05 Points)**

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$. On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par *x* et *y* les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés. A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i \ln y$.

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « M appartient à l'axe des abscisses ». **(0,5point)**

B : « M appartient à l'axe des ordonnées ». **(0,5point)**

C : « M appartient aux deux axes ». **(0,5point)**

D : « M n'appartient à aucun des axes ». **(0,5point)**

E : « l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{\imath})$ est égal à $\frac{-\pi}{4}$ » **(0,5point)**

F : « le point M appartient au cercle trigonométrique ».
(0,5point)

2. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **(1 point)**

b) Déterminer la fonction de répartition de X. **(1 point)**

Exercice III **(05 Points)**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : y''+ 2y'+ y = 0 **(0,5pt)**

2. Soit (E') l'équation différentielle y''+ 2y'+ y = x+ 3.
Déterminer les réels a *et* b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E'). **(0,25)**

3. a) Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si g-h est solution de (E). **(0,5pt)**

b) Résoudre alors (E'). **(0,25pt)**

c) Déterminer la solution f de (E') telle que
$f(0) = 2$ et $f\,'(0) = -1$. **(0,5pt)**

4. Soit la fonction k définie par $k(x) = (x+2)e^{-x}$

a) Etudier les variations de k. **(01,5pt)**

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de k au point d'abscisse 0. **(0,25pt)**

c) Démontrer que le point I(0 ; 2) est un point d'inflexion de (C). **(0,5pt)**

d) Tracer (C) et (T) dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **(0,75pt)**

Exercice IV **(07 Points)**

1.a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2ln(x+1)$. **(01,5pt)**

Tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormal. **(01pt)**

1.b) Démontrer que sur $[2\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique λ. **(01pt)**

2. On considère la suite (U_n), $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2ln(1+U_n) \end{cases}.$$

2.a) Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le repère. **(0,5pt)**

b) Démontrer par récurrence que pour tout n, $U_n \geq 2$. **(0,5pt)**

c) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2\,;+\infty[$,

$|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. **(0,5pt)**

d) En déduire que pour tout n, on a : $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$, que $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2(\frac{2}{3})^n$ et que la suite (U_n) converge vers λ.

(0,5+0,25pt)

e) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que

$|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que représente U_p $pour$ λ? **(0,5+0,25pt)**

1.4. BAC 2012

Exercice 1 **(5 x 0,25 = 02,5 points)**

1. Comparer les nombres complexes – i et $(\frac{\sqrt{3}-i}{2})^3$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes.

a) z^3- 1 = 0 ; b) z^3 = - i ; c) u^2 - (1- i)u – i = 0 ;

d) z^6 - (1- i) z^3 - i = 0.

Exercice 2 **(0,75 x 4 = 03 points)**

Dans chacun des cas suivants, l'une des propositions a), b), c) ou d) est vraie. Recopie le tableau ci-contre et indique dedans la proposition vraie.

Cas	Proposition vraie
cas N°1	
cas N°2	
cas N°3	
cas N°4	

Cas N° 1. Soit A et B les points d'affixes respectives z_A= 1 et z_B= i. L'ensemble des points M(z) tels que $\frac{z-i}{z-1}$ soit un imaginaire pur, est :

a) le cercle de diamètre [AB].

b) le cercle de diamètre [AB] privé de A.

c) la droite (AB) privé de A.

d) le cercle de diamètre [AB] privé de B.

Cas N° 2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout n, par $U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est :

a) une suite constante.

b) une suite arithmétique.

c) une suite géométrique.

d) une suite divergente.

Cas N° 3. On pose I = $\int_1^e x\ln x\,dx$. On a alors :

a) I = $\frac{e^2+1}{4}$;

b) I = e ;

c) I = $\frac{e^2-1}{4}$;

d) I = e - 1 .

Cas N° 4. Dans une culture de microbes, le nombre de microbes en un instant t exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique y à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que y'(t) = (ln2)y(t) et qu'à l'instant t = 0 la culture contient 200 microbes.

Alors le nombre de microbes dans la culture au bout de 5 heures est :

a) 1000. b) 1200. c) 6000. d) 6400.

Exercice 3 (04,25 points)

Le gardien de but doit faire face, lors d'une séance d'entrainement, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes révèlent que :

- S'il a arrêté le n^{ieme} tir, la probabilité qu'il arrête le suivant (le $(n+1)^{ieme}$) est 0,8.
- S'il a laissé passer le n^{ieme} tir, la probabilité qu'il arrête le suivant (le $(n+1)^{ieme}$) est 0,6.
- La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note A, l'événement « le gardien arrête le n^{ieme} tir ».

1. a) Donner pour $n \geq 1$, les valeurs de p($\overline{A_1}$), p(A_{n+1}/A_n) et p($A_{n+1}/\overline{A_n}$). **(0,75pt)**

b) Exprimer p($A_{n+1} \cap A_n$) en fonction de p(A_n) et p($A_{n+1} \cap \overline{A_n}$) en fonction de p($\overline{A_n}$). **(0,5pt)**

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a
p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6 . **(01pt)**

2. On pose pour $n \geq 1$, p_n = p(A_n) et $U_n = p_n$ - 0,75.

a) Démontrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison q = 0,2 et de premier terme U_1= - 0,05. **(0,5pt)**

b) En déduire une expression de U_n en fonction de *n*, puis une expression de p_n en fonction de *n*. **(01pt)**

c) Montrer que $(p_n)_{n\geq 1}$ admet une limite que l'on calculera.
(0,5pt)

<u>Problème</u> **(10,25 points)**

<u>Partie A</u>

On considère l'application g de [0 ; +∞[dans ℝ définie par :

g(x) = $\frac{2x^2}{x^2+1}$ - *ln(*$x^2 + 1$).

1. a) Déterminer la limite de *g(x)* quand *x* tend vers + ∞. **(0,5pt)**

b) Calculer la dérivée de *g* et donner son tableau de variations.
(0,5+0,5pt)

2. Montrer que sur l'intervalle [1, + ∞[l'équation *g(x) = 0* admet une solution unique α et que $1{,}9 \leq \alpha \leq 2$. **(0,5+O,25pt)**

3. Préciser le signe de *g* sur [0 ; +∞[. **(0,5pt)**

<u>Partie B</u>

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \; si \; x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \; si \; x > 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$), avec $||\vec{i}||$ = 2 cm .

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **(01pt)**

2. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$. **(0,5pt)**

3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,5+0,25pt)**

4. Calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles où f est dérivable et donner une relation liant $f'(x)$ et $g(x)$ pour $x > 0$. **(01+0,5pt)**

5. Etablir que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

(0,5+0,25pt)

6. Donner le tableau de variation de f et tracer la courbe (C).
(On prendra $\alpha \cong 1{,}95$ et $f(\alpha) \cong 0{,}85$) **(0,5+01,5pt)**

<u>Partie C</u>

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

1. Montrer que h est une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J à préciser. **(0,5pt)**

2. Représenter $(C_{h^{-1}})$, la courbe de h^{-1}, dans le repère
$(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,5pt)**

2. EPREUVES DU DEUXIEME GROUPE

2.1. BAC 2005

Exercice 1 **(03 points)**

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 e^x \cos(\frac{\pi}{4}x)\,dx$. Calculer I à l'aide de deux intégrations par parties successives.

Exercice 2 **(06 points)**

Soit la suite (Z_n) définie par : $\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_{n+1} = (1+i)Z_n + 2i \end{cases}$

1. Calculer Z_1 et Z_2. **(02pts)**

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = z_n + 2$.

a) Montrer que : $U_n = (2+i)(1+i)^n$. **(01pt)**

b) Exprimer Z_n en fonction de n. **(01pt)**

3. Soit M_{n+1}, M_n, A et B les points d'affixes respectives : Z_{n+1}, Z_n, i et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Démontrer que :

$\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que : $(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4}$. **(02pts)**

Exercice 3 **(06 points)**

Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants. Calculer la probabilité pour qu'il soit :

a) un homme atteint de paludisme. **(01pt)**

b) une femme atteinte de paludisme. **(01pt)**

c) une personne atteinte de paludisme. **(01pt)**

d) un homme non atteint de paludisme. **(01pt)**

e) un homme sachant qu'il est atteint de paludisme. **(01pt)**

f) une femme sachant que cet individu est atteint de paludisme.

(01pt)

Exercice 4 **(05 points)**

1. Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle y''+ 25y = 0 vérifiant $f(0) = 1$ *et* $f\,'(0) = 5$. **(02,5pts)**

2. Soit g la fonction numérique définie sur $[0, 2\pi]$ par $g(x) = \cos 5x - \sin 5x$ et (C_g) sa courbe. Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des abscisses. **(02,5pts)**

2.2. BAC 2011

Exercice I **(05 points)**

On considère le nombre complexe $z = 1+\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$.

1. Calculer z^2. **(01pt)** .

2. a) Ecrire z^2 sous forme trigonométrique. **(01pt)**

b) En déduire le module et un argument de z. **(01,5pt)**

3. Calculer z^6 . **(01,5pt)**

.

Exercice II **(04 points)**

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour $x \neq 0$ *et* $x \neq -1$ on a $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. **(01pt)**

2. Calculer $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$. **(01,5pt)**

3. En utilisant une intégration par parties calculer $J = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx.$ **(01,5pt)**

Exercice III **(06 points)**

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1. On pose $V_n = U_n - \frac{3}{2}$. Montrer que $(V_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_1.

(02pts)

2. Exprimer alors $V_n,\ puis\ U_n$ en fonction de n. **(01+01pts)**

3. Etudier la convergence de la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ et en déduire celle de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$. **(01+01pts)**

<u>Exercice IV</u> **(05 points)**

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant 3 boules vertes et 2 boules blanches et d'un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Une partie consiste pour un joueur à prélever au hasard une boule de l'urne ;

- Si la boule tirée est blanche, il lance le dé et gagne la partie si le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4.
- Si la boule tirée est verte, il lance et gagne la partie si le numéro obtenu est pair.

On considère les événements B : « le joueur tire une boule blanche »

et G : « le joueur gagne la partie » .

1. Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche.

(01pt)

2. Montrer que la probabilité de gagner la partie est $\frac{17}{30}$. **(02pts)**

3. Le joueur gagne la partie, quelle est la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche ? **(02pts)**

CORRIGE DES EXERCICES

D'APPLICATION

Chapitre1: L**IMITE-CONTINUITE-DERIVATION**

<u>Exercice 1</u> :

1. Ensemble de définition, limites aux bornes et asymptotes ?

➢ ***f(x) = -3x³+2x+1*** ;

f étant un polynôme, $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$.

➢ ***g(x)*** $= \frac{x-1}{2-x}$;

g(x) existe ssi $2-x\neq 0$ ssi $x\neq 2$; $D_g = \mathbb{R}-\{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 +\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{-x} = -1$.

D'où la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote parallèle à l'axe *(x'x)*.

- $\lim\limits_{x\to2} g(x) =$ « $\frac{1}{0}$ » ; on obtient une forme indéfinie :

signe du dénominateur :

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2-x$	+ 0 -

$\lim\limits_{x\to2} x-1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to2^-} (2-x) = 0^+$,

par quotient $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to2} x-1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to2^+} (2-x) = 0^-$,

par quotient $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = -\infty$.

D'où la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote parallèle à l'axe *(y'y)*.

➢ ***h(x)*** $= \frac{2x^2 - x - 6}{x-1}$;

$h(x)$ existe ssi x-1≠0 ssi x≠1 ; $D_h = \mathbb{R}-\{1\} =]-\infty\,;1[\cup]1+\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x$

  $= -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x$

  $= +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 1} h(x) =$ « $\frac{-5}{0}$ » ;

Signe du dénominateur :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
x-1	- 0 +

$\lim\limits_{x \to 1} 2x^2$-x-6 = -5 et $\lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = 0^-$,

par quotient $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1} 2x^2$ -x-6 = -5 et $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$,

par quotient $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$.

D'où la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale.

➢ ***i(x)*** $= \sqrt{x^2+1}$ **- 2x** ;

$i(x)$ existe ssi $x^2 + 1 \geq 0$; toujours vrai, $D_i = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$,

par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$,

par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x)$ est une forme indéterminée.

Levons l'indétermination :

$\lim_{x \to +\infty} i(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$ - 2x

$= \lim_{x \to +\infty} |x|(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$) - 2x

$= \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$) - 2x (car $x \to +\infty$, $|x| = x$)

$= \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ - 2) ;

or $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ - 2 = -1,

par produit $\lim_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$.

- **$j(x) = x - 2\sqrt{x-1}$** ;

$j(x)$ existe ssi $x - 1 \geq 0$ ssi $x \geq 1$; $D_j = [1 ; +\infty[$.

- $\lim_{x \to 1} j(x) = 1 - 2\sqrt{1-1} = 1$.
- Par somme $\lim_{x \to +\infty} j(x)$ est une forme indéterminée. Levons l'indétermination :

$\lim_{x \to +\infty} j(x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}.\sqrt{1-\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x}$ - $2\sqrt{1-\frac{1}{x}}$) ;

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} - 2\sqrt{1-\frac{1}{x}}$) $= +\infty$,

par produit $\lim_{x \to +\infty} j(x) = +\infty$.

2. (d) : $y = 2x+1$ asymptote oblique à C_h ?

- Montrons que $\lim_{x \to \pm\infty} [h(x) - (2x+1)] = 0$?

$$\lim_{x\to\pm\infty}[\,h(x) - (2x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}[\frac{2x^2-x-6}{x-1} - (2x+1)]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{-5}{x-1}) = 0\ ;$$

donc (d) : *y = 2x+1* est une asymptote oblique à C_h.

3. Branches infinies ?

- Branches infinies de C_i à - ∞ ?
  - $\lim_{x\to-\infty} i(x) = +\infty$;
  - $\lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x}$

    $= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\,(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\,)}{x}$

    $= \lim_{x\to-\infty} -\,(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2) = -3$;
  - $\lim_{x\to-\infty}[\,i(x)-(-3x)] = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x = ?$

En factorisant pour lever l'indétermination, on obtient une forme indéterminée de la forme « 0.∞ ». On doit donc utiliser une autre transformation d'écriture, celle qui consiste à multiplier par l'expression conjuguée ; ainsi on a

$$\lim_{x\to-\infty}[\,i(x)-(-3x)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{1(\sqrt{x^2+1}-x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

= 0 ;

donc la droite d'équation *y = 3x* est une asymptote oblique à Ci à - ∞.

- Branches infinies de C_j à + ∞ ?
  - $\lim_{x\to+\infty} j(x) = +\infty$;

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2\sqrt{x}\,(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\ )}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = 1$$

- $$\lim_{x\to+\infty} [j(x) - 1(x)] = \lim_{x\to+\infty} x - 2\sqrt{x-1} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{x-1} = -\infty \ ;$$

donc C_j admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

<u>Exercice 2</u> :

Pour les fonctions des questions 1 à 4, en remplaçant x par a, on obtient la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ "; ce qui explique la transformation d'écriture pour lever l'indétermination

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3-3x-2}{2x^2-x-6}}$;

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+1)^2}{2(x-2)(x+\frac{3}{2})}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x+1)^2}{2x+3} = \frac{9}{7}\ .$$

(on a factorisé le numérateur par la méthode de Horner)

2. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}}$ **;**

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{1}{4}\ .$$

(on a multiplié par l'expression conjuguée)

3. $f(x) = \frac{sinx}{x}$ **;**

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ où g(x) = $sinx$;

Or g étant dérivable en 0 et $g'(x) = cosx$, donc

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x}$ = g'(0) = 1.

NB : $\lim\limits_{u\to 0} \frac{sinu}{u} = 1$ est un théorème à retenir et à appliquer dans les calculs de limite.

4. $f(x) = \frac{x+sinx+sin3x}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \frac{sinx}{x} + 3\,\frac{sin3x}{3x}$

$= 1+ 1+3(1) = 5.$

5. $f(x) = \frac{x}{2+cos2x}$ **:**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ = ? En remplaçant x par $+\infty$, on obtient dans le calcul « $cos(+\infty)$ » qui n'a pas de sens, d'où l'utilisation des théorèmes de comparaison :

on a $-1 \le cos2x \le 1$ ssi $1 \le 2+cos2x \le 3$ ssi $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+cos2x} \le 1$

ssi $\frac{x}{3} \le \frac{x}{2+cos2x} \le x$ (car $x \to +\infty \Rightarrow x > 0$). Il résulte de cette dernière double inégalité que $f(x) \ge \frac{x}{3}$; or $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice3 :

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & si\ x \le -2 \\ \sqrt{7-x} & si -2 < x \le 1 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & si\ x > 1 \end{cases}$

a)

- **Continuité de f en -2?**

- $f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 3$.
- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} (x^2 + x + 1) = 3$.
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \sqrt{7-x} = 3$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = f(-2)$, donc f est continue en -2.

➤ **Continuité de f en 1 ?**

- $f(1) = \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$.
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{7-x} = \sqrt{6}$.
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x+1} = 0$.

$f(1) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, donc f n'est pas continue en 1.

➤ **Dérivabilité de f en – 2 ?**

* $\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2^-} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x+2}$

$= \lim\limits_{x\to-2^-} x-1 = -3$.

* $\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{\sqrt{7-x}-3}{x+2}$

$= \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{(\sqrt{7-x}-3)(\sqrt{7-x}+3)}{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{-(x+2)}{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)} = \frac{-1}{6}$.

$f'_g(-2) \neq f'_d(-2)$ donc f n'est pas dérivable en – 2.

➤ **Dérivabilité de f en 1 ?**

f n'étant pas continue en 1, f n'est pas dérivable en 1.

b) Interprétation graphique ?

La courbe de f admet au point d'abscisse – 2, deux demi-tangentes de coefficients directeurs – 3 et $-\frac{1}{6}$.

2. $\begin{cases} \boldsymbol{g(x) = \frac{x}{x-1}} \ \boldsymbol{si\ x \in]-\infty; 0]} \\ \boldsymbol{g(x) = \frac{-1+\cos 2x}{2x}} \ \boldsymbol{si\ x \in]0; +\infty[} \end{cases}$

- **Continuité et dérivabilité de g sur Dg ?**

- Sur $]-\infty;0]$, $g(x)$ existe ssi x-1$\neq$ 0 ssi $x\neq 1$;

toujours vrai sur $]-\infty;0]$; donc $D_1 =]-\infty;0]$.

Sur]0 ; + ∞[, $g(x)$ existe ssi $x \neq 0$ toujours vrai sur]0 ; + ∞[; donc D_2 =]0 ; + ∞[.

D'où Dg = $D_1 \cup D_2$ =]- ∞ ; +∞[.

- Sur $]-\infty;0[$, g étant une fonction rationnelle, g est continue et dérivable sur son ensemble de définition, en particulier sur $]-\infty;0[$.

- Sur]0 ; + ∞[, g est un quotient de fonctions continues et dérivables sur]0 ; + ∞[; la fonction $x\rightarrow 2x$ étant non nulle sur]0 ; + ∞[, donc g est continue et dérivable sur]0 ; + ∞[.

- Continuité de g en 0 ?

$*$ $g(0) = \frac{0}{0-1} = 0$.

$*$ $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{x-1} = 0$.

$*$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1+cos2x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{-2sin^2 x}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0+} \frac{sinx}{x}(-sinx)$;

Or $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{sinx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0+} (-sinx) = 0$, par produit $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0.

- Dérivabilité de g en 0 ?

$*$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{x}{x-1}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{x(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x-1} = -1$.

$*$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1+cos2x}{2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{-2sin^2 x}{2x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} -\left(\frac{sinx}{x}\right)^2 = -1$.

$f'_g(0) = f'_d(0)$ donc f est dérivable en 0.

Exercice 4 :

- **$f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$; f prolongeable par continuité en 0 ?**
  - $f(x)$ existe ssi $x \neq 0$; $D_f = \mathbb{R}-\{0\}$. Donc f est définie au voisinage de 0 et $O \notin D_f$
  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2(\sin\frac{x}{2})^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}(\sin\frac{x}{2})$:

or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{x}{2} = 0$, donc par produit

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

0 étant un réel fini, f est prolongeable par continuité en 0.

- ce prolongement est la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

Ensemble de dérivabilité, dérivée et signe de la dérivée des fonctions suivantes ?

1. $f(x) = x^3+x^2-5x+3$;

* f étant un polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = 3x^2+2x-5 = 3(x-1)(x+\frac{5}{3})$.

*Signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

2. $\boldsymbol{g(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}}$ **;**

* $g(x)$ existe ssi $x^2+x+1 \neq 0$; $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$; $\Delta < 0$ donc $D_g = \mathbb{R}-\phi = \mathbb{R}$.

* g étant une fonction rationnelle, g est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{(4x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(2x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{3x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

*Signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

3. $\boldsymbol{h(x) = \left(\frac{-2x+1}{x-1}\right)^3}$ **;**

* $h(x)$ existe ssi $x-1\neq 0$; $D_h = \mathbb{R}-\{1\}$.

* h étant la composée d'une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et de la fonction cube dérivable sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et

$$h'(x) = 3\left[\frac{-2(x-1)-(1)(-2x+1)}{(x-1)^2}\right]\left(\frac{-2x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{3}{(x-1)^2}\left(\frac{-2x+1}{x-1}\right)^2.$$

* $h'(x) \geq 0$ sur D_h .

4. $\boldsymbol{i(x) = x-1+\frac{4}{x+1}}$ **;**

* $i(x)$ existe ssi $x+1\neq 0$; $D_i = \mathbb{R}-\{-1\}$.

* i étant la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, i est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et $i'(x) = 1 + \frac{-4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$;

$$i'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

* Signe de $i'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$i'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	

5. $\boldsymbol{j(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}}}$ **;**

* $j(x)$ existe ssi $x^2+2x+1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2+2x+1} \neq 0$
ssi $x^2+2x+1 > 0$ ssi $(x+1)^2 > 0$ ssi $x+1 \neq 0$; $D_j = \mathbb{R}-\{-1\}$.
* j est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, la fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+2x+1}$ étant non nulle sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, j est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et

$$j'(x) = \frac{(1)\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)-\left(\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+1}}\right)(x)}{\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)^2-x(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)^3} = \frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)^3}.$$

Signe de $j'(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$j'(x)$	-	||	+

Remarques :

- $j(x) = \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{x}{|x+1|}$; mais pour calculer sa dérivée on écrit $j(x)$ sans le symbole de valeur absolue
- Le carré, la valeur absolue et la racine carrée d'une fonction u étant positifs ou nuls, donc $u^2 > 0$ (ou $|u| > 0$ ou $\sqrt{|u|} > 0$) ssi $u \neq 0$.

6. $\boldsymbol{k(x) = (1+\cos 2x)\sin^2 x}$ **;**

* $k(x)$ existe pour tout reel x; $D_k = \mathbb{R}$.
* k étant le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = (-2\sin 2x)(\sin^2 x) + (2\cos x\sin x)(1+\cos 2x)$

$k'(x) = (-2\sin 2x)(\sin^2 x) + (\sin 2x)(2\cos^2 x)$

$= (2\sin 2x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x$.

D_k est un domaine d'étude de k, déterminons une restriction de D_k ; pour cela étudions la périodicité et la parité de k.

$*$ $\forall x \in D_k = \mathbb{R}$, on a $\pi + x \in D_k$;

$$k(\pi + x) = [1+\cos 2(\pi + x)]\sin^2(\pi + x)$$
$$= [1+\cos(2\pi+2x)](-\sin x)^2 = k(x).$$

Donc k est périodique de période π et on peut restreindre son étude à un intervalle de longueur la période π

(par exemple $[0 ; \pi]$ ou $[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$)

$*$ $\forall x \in D_k = \mathbb{R}$, on a $-x \in D_k$

$k(-x) = [1+\cos 2(-x)]\sin^2(-x) = [1+\cos(-2x)](-\sin x)^2$

$= k(x)$, d'où k est paire ;

par conséquent on peut restreindre l'étude de k à l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Finalement on peut étudier k sur

$De = D_k \cap [\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \cap [0 ; +\infty[= [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

$*$ Etudions le signe de $k(x)$ sur $De = [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

$k'(x) = 0$ ssi $\sin 4x = \sin 0$ ssi $4x = 0+2k\pi$ ou $4x = \pi-0+2k\pi$

ssi $x = \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ les solutions de $k'(x) = 0$ sont : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$k'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

La dérivée garde un signe constant entre deux valeurs consécutives qui annulent la dérivée. Donc

$\frac{\pi}{8} \in [0 ; \frac{\pi}{4}]$; $k'(\frac{\pi}{8}) > 0$ donc $k'(x) > 0$ sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$.

$\frac{3\pi}{8} \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$; $k'(\frac{3\pi}{8}) > 0$ donc $k'(x) < 0$ sur $[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$.

<u>Remarque</u> : On peut aussi résoudre l'inéquation $k'(x) \geq 0$ pour déterminer le signe de la dérivée.

7. $\boldsymbol{l(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}}$ **;**

$*$ $l(x)$ existe ssi $|x^2-1| \geq 0$; toujours vrai, donc $D_l = \mathbb{R}$.

* l étant de la forme $\sqrt{u}$, l est dérivable ssi $|x^2-1| > 0$ ssi $x^2-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$ *et* $x \neq -1$.

* Pour calculer *l'(x)*, on écrit *l(x)* sans les barres de valeur absolue.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	$-$	+	
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1	

$$\begin{cases} l(x) = \sqrt{x^2-1} \;\; si\ x \in \,]-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty[\\ l(x) = \sqrt{-x^2+1} \;\; si\ x \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} l'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \;\; si\ x \in \,]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[\\ l'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{-x^2+1}} \, si\ x \in]-1; 1[\end{cases}$$

Signe de *l'(x)* :

* Sur $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$,
  l'(x) ≥ 0 ssi $x \geq 0$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
l'(x)	-				+

* Sur]-1 ; 1[, *l'(x)* ≥ 0 ssi
  $-x \geq 0$ *ssi* $x \leq 0$.

x	-1	0	1
l'(x)		+ 0 -	

D'où le signe de *l'(x)* sur $\mathbb{R}$-{-1 ; 1}.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
l'(x)	-		+ 0 -		+

<u>Exercice 6 :</u> ***f(x) = x³ – 3x + 8*** ;

Etudions les variations de *f* :

* f étant un polynôme, $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.
* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

⁎ f étant un polynôme, f est continue et dérivable sur ℝ et
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

1. Image par f d'intervalles ?

- $f([-3\,;\,-2]) = [f(-3)\,;\,f(-2)] = [-10\,;\,6]$. (car f est continue et strictement croissante sur $[-3\,;-2]$)
- $f(]-1\,;0]) = [f(0)\,;\,f(-1)[= [8\,;\,10[$. (car est f continue et strictement décroissante sur $]-1\,;0]$)
- $f([1\,;\,+\infty[\ ) = [f(1)\,;\,\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [6\,;\,+\infty[$. (car f est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$)

<u>Remarque</u> **:** $[1\,;\,+\infty[$ apparait dans le tableau de variation de f, son image par f peut être déterminée directement à partir du tableau de variation.

2.

- ***f(x)* = 0 admet une unique solution α ?**

⁎ Sur $]-\infty\,;\,-1[$ f est continue et strictement croissante ; donc f est une bijection de $]-\infty\,;-1]$ vers
$f(]-\infty\,;-1]) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(-1)] =]-\infty\,;10]$.

Or $0 \in\ ]-\infty\,;\,10]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]-\infty\,;-1]$.

⁎ Sur $]-1\,;\,1]$, f est continue et strictement décroissante ; donc f est une bijection de $]-1\,;1]$ vers $f(]-1\,;\,1]) = [6\,;10[$.

Or O $\notin$ [6 ; 10[, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution appartenant à]-1 ; 1].

* Sur]1 ; +∞[, f est continue et strictement croissante ; donc f est une bijection de]1 ; +∞[vers]6 ; +∞[. Or 0 $\notin$]6 ; +∞[, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur]1 ; +∞[.

Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $D_f = \mathbb{R}$ et que cette solution appartient à]-∞ ; -1].

- **Encadrement de α à 10^{-1} prés ?**

* $\alpha \in$]-∞ ; -1], cherchons deux réels a et b appartenant]-∞ ; -1] tels que $f(a)f(b) < 0$ (ou $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires) pour appliquer le théorème 4 de la rubrique « bijection ».

$\begin{cases} f(-3) = -10 \\ f(-2) = 6 \end{cases}$; $f(-3)f(-2) < 0$ donc $\alpha \in [-3; -2]$.

* on calcule ensuite l'image du centre de l'intervalle [-3; -2] :

$f[\frac{(-3)+(-2)}{2}] = f(-2,5) \approx -0,6$

$\begin{cases} f(-2,5) < 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases}$ donc $\alpha \in [-2,5; -2]$.

On continue la même démarche jusqu'à l'obtention de l'encadrement de α à 10^{-1} prés.

* $\frac{(-2,5)+(-2)}{2} = -2,25 \approx -2,2$ (puisqu'on cherche un encadrement à un chiffre après la virgule)

$f(-2,2) \approx 3,9$; $\begin{cases} f(-2,5) < 0 \\ f(-2,2) > 0 \end{cases}$ donc $\alpha \in [-2,5; -2,2]$.

* $\frac{(-2,5)+(-2,2)}{2} = -2,35 \approx -2,3$; $f(-2,3) \approx 2,7$; $\begin{cases} f(-2,5) < 0 \\ f(-2,3) > 0 \end{cases}$

donc $\alpha \in [-2,5; -2,3]$.

* $\frac{(-2,5)+(-2,3)}{2} = -2,4$; $f(-2,4) \approx 1,3$; $\begin{cases} f(-2,5) < 0 \\ f(-2,4) > 0 \end{cases}$ donc

$\alpha \in [-2,5; -2,4]$; d'où $-2,5 \leq \alpha \leq -2,4$.

3. Signe de *f(x)* ?

.

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0			$+$			

$f(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$.

$f(x) > 0$ sur $]\ \alpha\ ;\ -\infty\ [$.

$f(x) = 0$ si $x = \alpha$.

<u>Exercice 7</u>: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$ **.**

1. Variations de *f* ?

- $f(x)$ existe ssi $x-3 \neq 0$ ssi $x \neq 3$ donc

$D_f = \mathbb{R}-\{3\} =]-\infty\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[$.

- f étant une fonction rationnelle, f est continue et dérivable sur

D_f et $f\,'(x) = \dfrac{2(x-3)-(1)(2x-1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$.

- $f\,'(x) < 0$, dressons le tableau de variation ;

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	||	$-$	
f	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = 2.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2.$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ = « $\frac{5}{0}$ » ?

Signe du dénominateur :

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
x-3	- 0 +

* $\lim\limits_{x \to 3^-} 2x + 1 = 5$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} x - 3 = 0^-$, par quotient $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ = - ∞.

* $\lim\limits_{x \to 3^+} 2x + 1 = 5$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} x - 3 = 0^+$, par quotient $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ = + ∞.

2. *g* = *f* / *]- ∞ ; 3[* bijection de]- ∞ ; 3[vers J ?

g est la restriction de *f* sur]- ∞ ; 3[signifie que *g(x)* = *f(x)* sur]- ∞ ; 3[.

g est continue et strictement décroissante sur]- ∞ ; 3[, donc *g* est une bijection de]- ∞ ; 3[vers *f(]*- ∞ *; 3[ )* =]-∞ ; 2[= J.

3. *g* admet une bijection réciproque ?

g étant une bijection sur]- ∞ ; 3[, *g* admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur g(]- ∞ ; 3[ ) =]-∞ ; 2[et qui varie dans le même sens que g ; d'où son tableau de variation.

x	$-\infty$ 2
$(g^{-1})'(x)$	-
g^{-1}	$-\infty$ ↘ 3

4.

- **Calcul de *g(0)* ?** g(0) = $\frac{2(0)-1}{0-3} = \frac{1}{3}$;
- **Dérivabilité de g^{-1} en $\frac{1}{3}$ = g(?)**

$\frac{1}{3}$ = g(0) ; or g étant dérivable en 0 et g'(0) $\neq$ 0 (g'(0) = - $\frac{5}{9}$) donc g^{-1} est dérivable en g(0) = $\frac{1}{3}$ et $(g^{-1})'$ ($\frac{1}{3}$) = $\frac{1}{g'(0)}$ = - $\frac{9}{5}$.

5. Résolution de $g^{-1}(x) = 1$?

$g^{-1}(x) = 1$ ssi $x = g(1)$ (d'aprés le théorème 6 de la rubrique bijection) ; or $g(1) = -\frac{1}{2}$, donc $x = -\frac{1}{2}$ d'où S = $\{-\frac{1}{2}\}$.

6. Expression de g^{-1} ?

g étant une bijection de $]-\infty ; 3[$ vers $]-\infty ; 2[$, résolvons l'équation d'inconnue x, $g(x) = y$ où $x \in]-\infty; 3[= I$ et $y \in]-\infty;\ 2[= f(I)$.

$y = g(x)$ ssi $\frac{2x-1}{x-3} = y$ ssi $2x-1 = yx - 3y$ ssi $x(2-y) = -3y+1$ ssi

$x = \frac{-3y+1}{2-y}$; (car $y \in]-\infty;\ 2[$ donc $y \neq 2$)

d'où $g^{-1} : y \rightarrow x = \frac{-3y+1}{2-y}$; par conséquent $g^{-1}(x) = \frac{-3x+1}{2-x}$.

Chapitre2 :**GENERALITES SUR LES FONCTIONS**

<u>Exercice 1</u> : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. Variation de *f* et Tableau de variation ?

$*$ $D_f = \mathbb{R}$.

$*$ f étant une fonction polynôme, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\,'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			4				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				0		

$*$ $f(0) = 4$; $f(2) = 0$.

$*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty.$

2.

a) *f* admet une bijection réciproque ?

f étant continue et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$, donc f est une bijection de $[2\,;+\infty[$ vers $f([2\,;+\infty[,) = [0\,;+\infty[$;
par conséquent f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $[0\,;+\infty[$.

b) Dérivabilité de f^{-1} en 0 ?

$0 = f(2)$; f est dérivable en 2, mais $f\,'(2) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 0.

3. $f(x) = 1$ admet une unique solution dans [2 ; + ∞[?

f est une bijection de [2 ; +∞[vers [0 ; +∞[; de plus 1 appartient à [0 ; +∞[, donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α appartenant à [2 ; +∞[.

4. Points d'intersection avec

- **l'axe des ordonnées ?**

$f(0) = 4$ donc on a le point A(0 ; 4)

- **l'axe des abscisses ?**

$f(x) = 0$ ssi $x^3-3x^2+4 = 0$; l'équation étant de degré 3, cherchons une racine évidente de $f(x)$.

$f(-1) = 0$ donc $f(x) = (x+1)g(x)$;

déterminons $g(x)$ avec la méthode de Horner :

	1	-3	0	4
(-1)		-1	4	-4
	1	-4	4	0

$f(x) = (x+1)(x^2-4x+4)$

$f(x) = 0$

$x = -1$ ou $x^2- 4x+4 = 0$

$x = -1$ ou $x =2$;

donc on a les points B(-1 ; 0) et C(2 ;0).

5. Equation de la tangente en 1 ?

(T) : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $x_0 = 1$ donc

(T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or $f'(1) = -3$ et $f(1) = 2$ donc

(T) : $y = -3x + 5$.

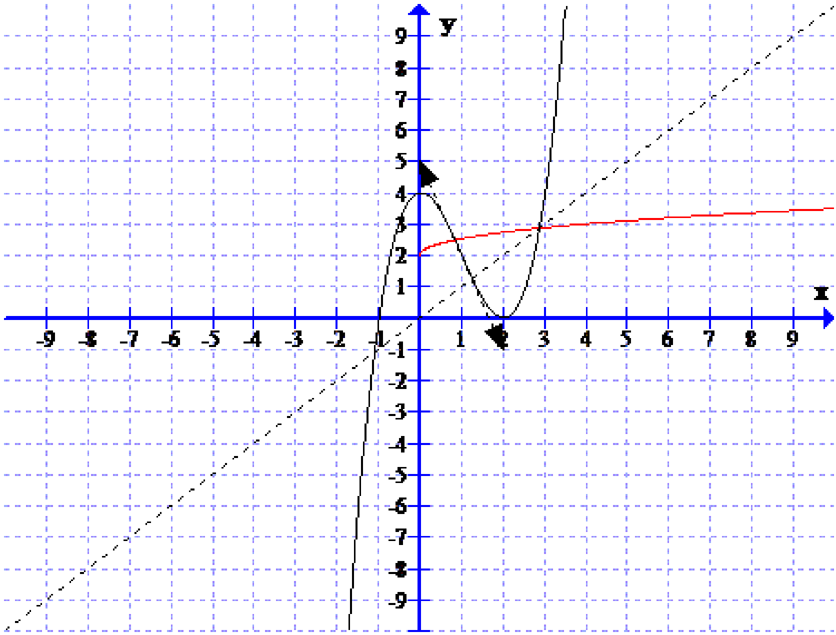
6. Tracé de C_f, de (T) et de $C_{f^{-1}}$?

Soit (d) : $y = x$

* (C) la courbe de la bijection passe par les points A(2 ; 0), son symétrique $C_{f^{-1}}$ passera par A'(0 ; 2).

* (C) admet en A une demi-tangente horizontale, son symétrique $C_{f^{-1}}$ admet en A' une demi- tangente verticale.

* *f* étant croissante sur [2 ; +∞[, f^{-1} est aussi décroissante sur *f([2 ; +∞[)* = [0 ; +∞[; d'où le tracé de $C_{f^{-1}}$.



<u>Légende</u> : — Tracé de C_f

— Tracé de $C_{f^{-1}}$

7. Résolution graphique de l'équation *f(x)* = m ?

-Si m ∈ $]-\infty;0[$, on a une solution.

-Si m = 0, on a deux solutions.

-Si m $\in$]0 ; 4[, on a trois solutions.
-Si m = 4, on a deux solutions.
-Si m $\in$]4 ; +∞[, on a une solution.

<u>Exercice 2</u> : $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$.

1. D_f et a, b, c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{1-x}$?

- $f(x)$ existe ssi x-1≠0 ; D_f =]- ∞ ; 1[∪]1 ; +∞[.
- $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{1-x} = \dfrac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$

$$= \frac{-ax^2+(a-b)x+b+c}{x-1} = \frac{x^2}{1-x} \;;$$

par identification $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

d'où $f(x) = -x-1+\dfrac{1}{1-x}$.

(on pouvait obtenir ce résultat par la division euclidienne).

2. Asymptote oblique et position par rapport à C_f ?

- **Montrons que $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (-x-1)] = 0$?**

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (-x-1)] = \lim\limits_{x\to\infty\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$;

d'où (d) : y = -x-1 est une asymptote oblique à C_f.

- **Etudions le signe de $h(x) = f(x) - (-x-1)$?**

$h(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$h(x) > 0$ ssi 1-$x > 0$ ssi $x < 1$. Donc

- Sur]-∞; 1[, h(x) > 0 d'où C_f au dessus de (d).
- Sur] 1; +∞[, h(x) < 0 d'où C_f en dessous de (d).

3.

- **Variation de f ?**

* f étant une fonction rationnelle, f est continue et dérivable sur D_f et $f'(x) = \frac{2x(1-x)-(-1)(x^2)}{(1-x)^2} = \frac{-x(x-2)}{(1-x)^2}$.

* $f'(x)$ a le même signe que son numérateur.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x$
$= +\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$.

* $\lim\limits_{x\to1} f(x) =$ « $\frac{1}{0}$ » ?

signe du dénominateur :

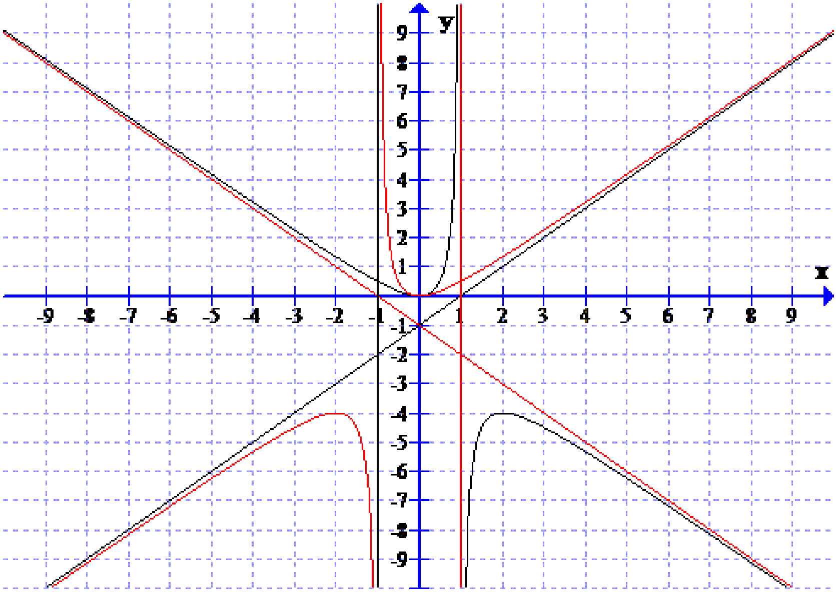
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

* $\lim\limits_{x\to1^-} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to1^-} (1-x) = 0^+$, par quotient $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

* $\lim\limits_{x\to1^+} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to1^+} (1-x) = 0^-$ par quotient $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$.

d'où (Δ): $x = 1$ est une asymptote parallèle à l'axe $(y'y)$.

➢ Tracé de C_f ?



Légende : — Tracé de C_f

— Tracé de C_g

4. Point d'intersection des asymptotes centre de symétrie ?

Soit I ce point, ces coordonnées sont les solutions du système $\begin{cases} x = 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$; d'où I(1 ; -2).

Montrons que $\forall x \in D_f$, $2a\text{-}x \in D_f$ et $f(2a\text{-}x) + f(x) = 2b$

C'est-à-dire $\forall x \in D_f$, $2\text{-}x \in D_f$ et $f(2\text{-}x) + f(x) = -4$?

- $x \in D_f$ ssi $x \neq 1$ ssi $-x \neq -1$ ssi $2\text{-}x \neq 1$ d'où $2a\text{-}x \in D_f$.
- $f(2\text{-}x) = \frac{(2-x)^2}{1-(2-x)} = \frac{4-4x+x^2}{-1+x}$

$$= \frac{-4+4x-x^2}{1-x} \text{ ;}$$

$$f(2\text{-}x) + f(x) = \frac{-4+4x-x^2}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} = \frac{-4(1-x)}{1-x}$$

$$= -4 \text{ ;}$$

donc $f(2\text{-}x) + f(x) = -4$ d'où I est centre de symétrie de C_f.

5. Tracé de C_g ? $g(x) = \frac{x^2}{1+x}$;

$g(x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)} = f(-x)$;

d'où C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des ordonnées.

<u>Exercice 3</u> : $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$; D = [-2 ; 2].

1.

- **Continuité de f en 0?**

* $f(0) = 0$.

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4-(4-x^2)}{x(2+\sqrt{4-x^2})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(2+\sqrt{4-x^2})} = 0.$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

- **Dérivabilité de f en 0 ?**

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4-(4-x^2)}{x^2(2+\sqrt{4-x^2})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(2+\sqrt{4-x^2})} = \frac{1}{4}.$$

$\frac{1}{4}$ étant fini, f est dérivable en 0 et C_f admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{4}$.

- **Continuité de f en 2?**

* $f(2) = \frac{2-\sqrt{4-4}}{2} = 1$.

* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ donc f est continue en 2.

- **Dérivabilité de f en 2 ?**

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{4-x^2}-x}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(x-2)} - \frac{-\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x(x-2)} - \frac{-(x-2)(x+2)}{x(x-2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-1}{2} + (+\infty) = +\infty\ ;$$

donc f n'est pas dérivable en 2 et C_f admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale.

Remarque : f étant définie sur [-2 ; 2], c'est la continuité et la dérivabilité à gauche de 2 qu'on a étudiées.

2.

- **Parité de f ?**

- $\forall\, x \in D$, montrons que $-x \in D$?

$x \in D$ ssi $-2 \leq x \leq 2$ ssi $-2 \leq -x \leq 2$ ssi $-x \in D$.

- $f(-x) = \frac{2-\sqrt{4-(-x)^2}}{(-x)} = -\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$;

f(-x) = - *f(x)*, donc f est impaire.

Par conséquent on peut l'étudier sur D∩[0 ; +∞[= [0 ; 2] et compléter le tracé de C_f sur [-2 ; 0] par symétrie par rapport à l'origine du repère.

- **Variation de f sur [0 ; 2]**

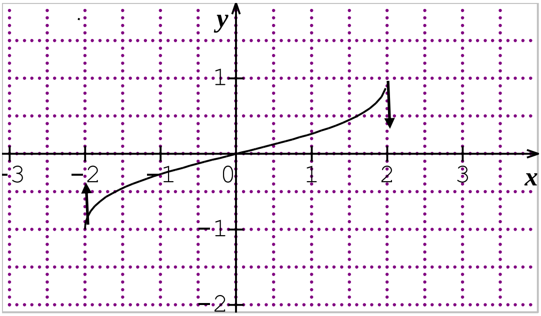
f est le quotient de fonctions continues et dérivables sur]0 ; 2[; la fonction $x \to x^2$ étant non nulle sur]0 ; 2[, f est continue et dérivable sur]0 ; 2[et

$$f'(x) = \frac{\frac{-(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}(x)-(1)(2-\sqrt{4-x^2})}{x^2} = \frac{-2\sqrt{4-x^2}+4}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$$

$f'(x) \geq 0$ ssi $-2\sqrt{4-x^2} + 4 \geq 0$ ssi $\sqrt{4-x^2} \leq 2$
ssi $4 - x^2 \leq 4$ ssi $x^2 \geq 0$; toujours vrai.

x	0 $\qquad\qquad$ 2
$f'(x)$	$+$ $\qquad$ |
f	$0 \nearrow 1$

3. **Tracé de C_f sur [-2 ; 2]**



f étant impaire, la portion de courbe sur [-2 ; 0] est obtenue par symétrie par rapport à l'origine O du repère.

<u>Exercice 4</u> : ***f(x) = cos4x + 2sin2x***

1.

- **Domaine d'étude ?**

$D_f = \mathbb{R}$. Les fonctions $x \to cos4x$ et $x \to 2sin2x$ étant périodiques de périodes respectives $\frac{\pi}{2}$ *et* π , montrons que π (qui est un multiple de $\frac{\pi}{2}$) est la période de *f*.

$*$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x + \pi \in \mathbb{R}$.

$*$ $f(x+\pi) = cos4(x+\pi) + 2sin2(x+\pi)$
$\qquad = cos(4x+4\pi) + 2sin(2x+2\pi)$
$\qquad = cos4x + 2sin2x = f(x)$.

Donc f est périodique de période π et par conséquent on peut l'étudier sur De = $\mathbb{R} \cap [0\,;\pi] = [0\,;\pi]$.

- **Dérivée de *f* ?**

f étant une somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = -4\sin 4x + 4\cos 2x = -4(2\sin 2x\cos 2x) + 4\cos 2x$

$\quad = 4(\cos 2x)(1-2\sin 2x).$

2.

- **Solution de l'équation *f '(x)* = 0 ?**

$f'(x) = 0$ ssi $\cos 2x = 0$ ou $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$ ou $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ssi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$S_{[0;\,\pi]} = \{\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{12}\,;\frac{5\pi}{12}\}.$

- **Variation de *f* sur [0 ; π] ?**

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

$= 1$; $f(\frac{\pi}{12}) = \frac{3}{2}$; $f(\frac{\pi}{4}) = 1$; $f(\frac{5\pi}{12}) = \frac{3}{2}$; $f(\frac{3\pi}{4}) = -3$;

$f(\pi) = 1.$

3. $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie ?

- $\forall x \in \mathbb{R}$, montrons que $2a-x \in \mathbb{R}$?

$2a-x = \frac{\pi}{2} - x$; $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$.

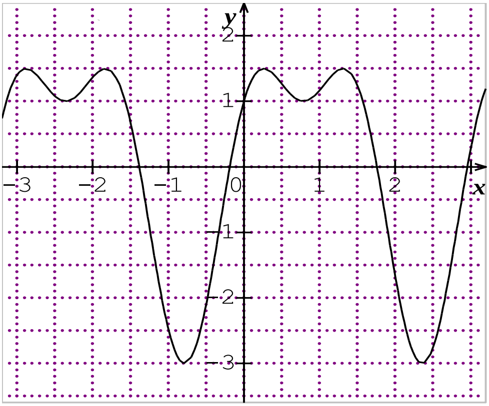
- $f(2a-x) = f(\frac{\pi}{2} - x) = cos4(\frac{\pi}{2} - x) + 2sin2(\frac{\pi}{2} - x)$

$$= cos(2\pi-4x) + 2sin(\pi-2x) = cos(-4x) + 2sin2x$$

$$= cos4x + 2sin2x = f(x) ;$$

donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de C_f.

4. **Tracé de C_f sur $[-\pi ; \pi]$?**



Chapitre 3 : FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

<u>Exercice 1</u> Soit S l'ensemble des solutions

1) $\boldsymbol{ln(2x-5)+ln(1+x)=2ln2}$

* L'équation existe ssi $2x-5>0$ et $1+x>0$

D = $]\frac{5}{2}\,;+\infty[\cap]-1\,;+\infty[\,=\,]\frac{5}{2}\,;+\infty[$.

* $ln(2x-5)+ln(1+x)=2ln2$ ssi $ln(2x-5)(1+x)=ln2^2$

ssi $(2x-5)(1+x)=4$ ssi $2x^2-3x-9=0$

$\Delta = 81$; $x_1 = 3$ et $x_2=\frac{-3}{2}$

d'où S = $\{3\,;\frac{-3}{2}\}\cap D=\{3\}$.

2) $\boldsymbol{2lnx+3=0}$

* L'équation existe ssi $x>0$; D = $]0\,;+\infty[$.

* $2lnx+3=0$ ssi $lnx=\frac{-3}{2}$ ssi $lnx=\frac{-3}{2}lne$ ssi $lnx=lne^{\frac{-3}{2}}$

ssi $x=e^{\frac{-3}{2}}$;

d'où S = $\{e^{\frac{-3}{2}}\}\cap D=\{e^{\frac{-3}{2}}\}$.

3) $\boldsymbol{(lnx)^3-lnx^3=-2}$

* L'équation existe ssi $x>0$ et $x^3>0$ ssi $x>0$; D = $]0\,;+\infty[$.

* $(lnx)^3-lnx^3=-2$ ssi $(lnx)^3-3lnx+2=0$;

en posant $X=lnx$, on obtient l'équation $X^3-3X+2=0$.

-2 étant une racine évidente, donc $X^3-3X+2=(X+2)\,Q(X)$;

déterminons Q(X) par la méthode de Horner :

	1	0	-3	2
(-2)		-2	4	-2
	1	-2	1	0

$Q(X)=X^2-2X+1=(X-1)^2$.

Donc $X^3-3X+2=0$

ssi $X=-2$ ou $X=1$;

or $X=lnx$, donc

lnx = -2 ou lnx = 1 ssi lnx = lne^{-2} ou lnx = lne

ssi $x = e^{-2}$ ou x = e d'où S = {e^{-2} ; e}∩D = { e^{-2} ; e }.

4) $lnx - ln(2-x) \geq 0$

* L'inéquation existe ssi $x > 0$ et $2- x > 0$;

D =]0 ; + ∞[∩]- ∞ ; 2[=]0 ; 2[.

* $lnx - ln(2-x) \geq 0$ ssi $lnx \geq ln(2-x)$ ssi $x \geq 2-x$ ssi $x \geq 1$

d'où S = [1 ; + ∞[∩D = [1 ; 2[.

5) $ln(\frac{x+1}{x-1}) \leq 0$

* L'inéquation existe ssi $\frac{x+1}{x-1} > 0$

X	-∞ -1		1 +∞
$\frac{x+1}{x-1}$	+ 0 -		+

D =]- ∞ ; -1[∪]1 ; + ∞[.

* $ln(\frac{x+1}{x-1}) \leq 0$ ssi $ln(\frac{x+1}{x-1}) \leq ln1$ ssi $\frac{x+1}{x-1} \leq 1$ ssi $\frac{x+1}{x-1} - 1 \leq 0$

ssi $\frac{2}{x-1} \leq 0$ ssi $x - 1 < 0$ ssi $x < 1$;

d'où S =]- ∞ ; 1[∩D =]- ∞ ; -1[.

6) ln^2x - $2lnx$ – 3> 0

* L'inéquation existe ssi $x > 0$; D =]0 ; + ∞[.

* $ln^2x - 2lnx - 3 > 0$; en posant lnx = X, on obtient l'inéquation

$X^2 - 2X - 3 > 0$. $X_1 = -1$;

Or $X_1X_2 = \frac{c}{a}$, donc $X_2 = 3$

X	-∞ -1		3 + ∞
$X^2 - 2X - 3$	+	-	+

$X^2 - 2X - 3 > 0$ ssi X ∈]- ∞ ; -1[∪]3 ; + ∞[

ssi X < - 1 ou X > 3 *ssi* $lnx < -1$ ou $lnx > 3$

$lnx < lne^{-1}$ ou $lnx > lne^3$

$x < e^{-1}$ ou $x > e^3$;

d'où S = ( ]- ∞ ; e^{-1}[∪]e^3 ; + ∞[ )∩D =]0; e^{-1}[∪]e^3 ; + ∞[.

7) $e^2.e^{-x} - e^{x^2-4} = 0$

$e^2.e^{-x} - e^{x^2-4} = 0$ ssi $e^{2-x} = e^{x^2-4}$ ssi 2- x = $x^2 - 4$

ssi $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = 2$, or $2x_2 = -6$ donc $x_2 = -3$

d'où S = {2 ; -3}.

8) $e^x - 2e^{-x}$ = -1

$e^x - 2e^{-x}$ = -1 ssi e^x- $\frac{2}{e^x}$ + 1 = 0 ssi $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

ssi $(e^x)^2$ + e^x - 2 = 0 ; en posant X = e^x, on obtient

X^2 + X – 2 = 0.

X_1= 1 ; 1X_2 = -2 ssi X_2 = -2 ; or X = e^x, donc

e^x = 1 ou e^x = -2

$e^x = e^O$ impossible

x = 0

D'où S = {0}.

9) $(e^{x-1})^4 \geq e^{x^2}$

$(e^{x-1})^4 \geq e^{x^2}$ ssi $e^{4x-4} \geq e^{x^2}$ ssi 4x- 4 ≥ x^2

ssi - x^2 + 4x- 4 ≥ 0

Δ = 0, x_0 = 2 ;

S = {2}.

x	-∞ 2 +∞
- x^2 + 4x- 4	- 0 -

10) $\begin{cases} \boldsymbol{2lnx - 3lny = 5} \\ \boldsymbol{lnx + 2lny = -1} \end{cases}$

⁎ Le système existe ssi $x > 0$ et $y > 0$.

⁎ En posant X = lnx et Y = lny, on obtient $\begin{cases} 2X - 3Y = 5 \\ X + 2Y = -1 \end{cases}$;

Par la méthode d'addition, on trouve : X = 1 et Y = -1 ;

or X = lnx et Y = lny donc lnx = 1 et lny = -1

lnx = lne et lny = lne^{-1}

x = e et $y = e^{-1}$;

Or e > 0 et $e^{-1} > 0$ donc S = {(e ; e^{-1})}.

11) $\begin{cases} \boldsymbol{e^x . e^y - e^5 = 0} \\ \boldsymbol{lnx + lny = ln2 + ln3} \end{cases}$

⁎ Le système existe ssi $x > 0$ et $y > 0$.

⁎ $\begin{cases} e^x . e^y - e^5 = 0 \\ lnx + lny = ln2 + ln3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} e^{x+y} = e^5 \\ \ln(xy) = ln6 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Si les nombres x et y existent alors ils sont solutions de l'équation $t^2 - 5t + 6 = 0$. Or $t_1 = 2$ donc $2t_2 = 6$ d'où $t_2 = 3$;
2 et 3 étant positifs donc S = {(2 ; 3) ; (3 ; 2)}

Exercice 2

1) $f(x) = x\ln x - x$

* $f(x)$ existe ssi $x > 0$; $D_f =]0 ; +\infty[$.
* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x - 1) = ?$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 1 = +\infty$,
par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

* $f'(x) = (1)\ln x + x(\frac{1}{x}) - 1 = \ln x$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $\ln x \geq 0$ ssi $\ln x \geq \ln 1$ ssi $x \geq 1$.

* Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0 $\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

2) $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$

* $f(x)$ existe ssi $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

X	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	||	-

$D_f =]-1 ; 1[$.

* $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to-1^+} (\frac{1+x}{1-x}) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,
donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.

* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to 1^-} (\frac{1+x}{1-x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

$*$ $f'(x) = \frac{(\frac{1+x}{1-x})'}{(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{(1)(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}(\frac{1-x}{1+x})$

$= \frac{2}{(1-x)(1+x)}$. $x \in D_f$ donc $\frac{1+x}{1-x} > 0$; or ce quotient a le même signe que le produit $(1-x)(1+x)$, donc $(1-x)(1+x) > 0$, d'où $f'(x) > 0$.

$*$ Tableau de variation

x	-1		1
$f'(x)$		+	
f		$-\infty \nearrow +\infty$	

3) $f(x) = \frac{lnx+1}{lnx-1}$

$*$ $f(x)$ existe ssi $x > 0$ et $lnx - 1 \neq 0$ ssi $x > 0$ et $x \neq e$;
d'où $D_f =]0 ; +\infty[- \{e\} =]0 ; e[\cup]e; +\infty[$.

$*$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(lnx)(1+\frac{1}{lnx})}{(lnx)(1-\frac{1}{lnx})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{lnx}}{1-\frac{1}{lnx}}$;

or $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{lnx} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ par quotient.

$*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(lnx)(1+\frac{1}{lnx})}{(lnx)(1-\frac{1}{lnx})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{lnx}}{1-\frac{1}{lnx}}$;

or $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{lnx} = 0$, d'où
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ par quotient.

$*$ $\lim\limits_{x\to e} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to e} lnx + 1 = 2$; $\lim\limits_{x\to e} lnx - 1 = 0$

Signe du dénominateur
$lnx - 1 \geq 0$ ssi $x \geq e$

x	0	e	$+\infty$
$lnx-1$	-	0	+

$*\ \lim\limits_{x \to e^-} lnx + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x \to e^-} lnx - 1 = 0^-$,

par quotient $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$ = -∞.

$*\ \lim\limits_{x \to e^+} lnx + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x \to e^+} lnx - 1 = 0^+$,

par quotient $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$ = +∞.

$*\ f\ '(x) = \frac{\frac{1}{x}(lnx-1)-\frac{1}{x}(lnx+1)}{(lnx-1)^2} = \frac{-2}{x(lnx-1)^2}$. Or $x > 0$, donc $f\ '(x) < 0$.

$*$ Tableau de variation

x	0		e		+∞
$f\ '(x)$	‖	-	‖	-	
f	‖	1 ↘ - ∞	‖	+∞ ↘ 1	

4) $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

$*\ f(x)$ existe ssi 1- $e^x \neq 0$ ssi $x \neq 0$; D_f =]-∞ ; 0[∪]0 ; + ∞[.

$*\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ = ?

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ par quotient.

$*\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}{e^x(\frac{1}{e^x}-1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}$;

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ par quotient.

$*\ \lim\limits_{x \to 0} 1 + e^x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} 1 - e^x = 0$;

Signe du dénominateur :

$1 - e^x \geq 0$ ssi $e^x \leq 1$ ssi $x \leq 0$

x	-∞	0	+∞
$1 - e^x$	+	0	-

$*\ \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + e^x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 - e^x = 0^+$,

par quotient $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$= +∞.

* $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + e^x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - e^x = 0^-$

par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

* $f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)-(-e^x)(1+e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{2\,e^x}{(1-e^x)^2}$; $f'(x) > 0$.

* Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
f	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -1$

5) $f(x) = -2x+1+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

* $f(x)$ existe ssi $\left|\frac{x+1}{x}\right| > 0$ ssi $\frac{x+1}{x} \neq 0$ ssi $x \neq -1$ et $x \neq 0$;

d'où $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 0\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} lnx = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = 0$; de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x+1 = +\infty$, par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} lnx = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = 0$; de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x+1 = -\infty$ par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

* $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -1} \left|\frac{x+1}{x}\right| = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} lnx = -\infty$, donc

$\lim\limits_{x \to -1} ln|\frac{x+1}{x}|$ = - ∞ ; de plus $\lim\limits_{x \to -1} -2x + 1$ = 3

d'où $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ = - ∞ par somme.

∗ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ = ?

$\lim\limits_{x \to 0} |\frac{x+1}{x}|$ = +∞ et $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx$ = + ∞, donc

$\lim\limits_{x \to 0} ln|\frac{x+1}{x}|$ = +∞ ; de plus $\lim\limits_{x \to 0} -2x + 1$ = 1

d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ = + ∞ par somme.

∗ $f'(x) = -2 + \dfrac{\frac{(1)(x)-(1)(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = -2 + \dfrac{-1}{x(x+1)}$;

$f'(x) = \dfrac{-2x^2-2x-1}{x(x+1)}$.

∗ Signe de *f '(x)*

N = $-2x^2 - 2x - 1$;

Δ' = $(-1)^2$ - (-2)(-1) = -1

Δ'< 0, N est du signe de a = -2

x	-∞	-1	0	+∞
$-2x^2 - 2x - 1$	-	-	-	
x(x+1)	+	0 -	0 +	
f '(x)	-	‖ +	‖ -	

∗ Tableau de variation

x	-∞	-1		0		+∞
f '(x)	-	‖	+	‖	-	
f	+∞ ↘ -∞	‖	-∞ ↗ +∞	‖	+∞ ↘ -∞	

6) *f(x)* = $x + e^{-x}$

∗ *f(x)* existe ∀ x ∈ ℝ ; D_f = ℝ =]-∞ ; +∞[.

∗ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = ?

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$ = 0 ; par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(\frac{x}{e^{-x}} + 1)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(xe^{x} + 1)$;

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$, donc par produit

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$*$ $f'(x) = 1 - e^{-x}$. $f'(x) \geq 0$ ssi $e^{-x} \leq 1$ ssi $-x \leq 0$ ssi $x \geq 0$.

$*$ Tableau de variation

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
f	$+\infty$ ↘ 1 ↗ $+\infty$

7) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$*$ $f(x)$ existe ssi $x \neq 0$ et $x^2 \neq 0$ ssi $x \neq 0$;

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

$*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$;

de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ par produit.

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$;

de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par produit.

$*$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

de plus $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ par produit.

* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$ (avec X = $\frac{1}{x}$) .

* $f'(x) = \frac{-2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (\frac{1}{x^2}) = \frac{-2x-1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$;

$f'(x) \geq 0$ ssi $-2x-1 \geq 0$ ssi $x \leq \frac{-1}{2}$.

* Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	$0 \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	0

8) $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$

* $f(x)$ existe ssi $e^x + e^{-x} \neq 0$, toujours vrai (car on a une somme de termes strictement positifs); $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$;

or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} + 1 = 1$, donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ par quotient.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x}(1-e^{-2x})}{e^{x}(1+e^{-2x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$, donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ par quotient.

* $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

$f'(x) > 0$.

* Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$	1

9) $\boldsymbol{f(x) = x - \ln(1 + e^x)}$

* $f(x)$ existe ssi $1 + e^x > 0$; toujours vrai, $D_f = \mathbb{R} =]-\infty\ ; +\infty[$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} lnx = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par somme.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln[e^x(\frac{1}{e^x} + 1)]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x - [\ln e^x + ln(e^{-x} + 1)]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x - [x + ln(e^{-x} + 1)]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(e^{-x} + 1) = 0$.

* $f\,'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$; $f\,'(x) > 0$.

* Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f\,'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ 0

<u>**Exercice 3**</u>

$f(x) = \ln(\cos x)$

1. Variations de f sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$?

* $f(x)$ existe ssi $cosx > 0$; toujours vrai sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,donc le domaine d'étude $D_e =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

$*$ $f'(x) = \frac{-sinx}{cosx}$. Or $cosx > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc $f'(x)$ est du signe de $-sinx$.

Or $sinx < 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; 0[$ et $sinx > 0$ sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ (on peut montrer ces résultats ou les déduire à partir du cercle trigonométrique) il en résulte le tableau suivant :

$*$ Tableau de variation

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	

$*$ $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} cosx = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} lnx = -\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$.

$*$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} cosx = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} lnx = -\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$.

2. a) $cosx + \sqrt{3}sinx = 0$?

$cosx + \sqrt{3}sinx = 0$

$\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}\, cos(x - \varphi) = 0$ où $\begin{cases} cos\varphi = \frac{1}{2} \\ sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ c'est-à-dire $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$2cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$ ssi $cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$ ssi $cos(x - \frac{\pi}{3}) = cos(\frac{\pi}{2})$

ssi $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$;

L'ensemble des solutions $S = \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,;\, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $g(x) = \ln(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$, C_g?

$g(x) = \ln(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = \ln[2\cos(x - \frac{\pi}{3})]$

$= \ln 2 + \ln[\cos(x - \frac{\pi}{3})] = f(x - \frac{\pi}{3}) + \ln 2;$

d'où C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $\frac{\pi}{3}\vec{i} + (\ln 2)\vec{j}$.

Exercice 4

A. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x$

1. D_f et limites aux bornes ?

* $f(x)$ existe ssi $x > 0$; d'où $D_f =]0 \,;\, +\infty[$

* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2\ln x = 0$, par somme

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2(\frac{1}{2} - \ln x) = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} - \ln x = -\infty$,

par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. prolongement par continuité de f en 0 ?

$0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; 0 étant fini, f peut être prolongée par continuité en 0.

Ce prolongement est la fonction k définie par

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

B. $\begin{cases} \boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x \text{ si } x > 0} \\ \boldsymbol{g(0) = 0} \end{cases}$

1. Dérivabilité de g sur [0; + ∞[?

∗ Sur]0; + ∞[, *g* étant la somme de fonctions dérivables sur]0; + ∞[, *g* est dérivable sur]0; + ∞[.

∗ Dérivabilité de g en 0 ?

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x - x\ln x = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$,

par somme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$;

d'où *g* est dérivable en 0 et g'(0) = 0.

2. Variations de *g* ?

∗ $D_g = [0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

∗ $g'(x) = x - [2x\ln x + \frac{1}{x}(x^2)] = -2x\ln x$.

Or $x \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$ ssi $-2\ln x \geq 0$ ssi $\ln x \leq 0$ ssi $x \leq 1$.

∗ Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

3. *h = g* /[1 ; +∞[

a) *h* admet une bijection réciproque ?

h étant continue (car dérivable) et strictement décroissante sur [1 ; +∞[, *h* est une bijection de [1 ; +∞[vers]- ∞ ; $\frac{1}{2}$] et par conséquent elle admet une bijection réciproque h^{-1} définie]- ∞ ; $\frac{1}{2}$].

b) Dérivabilité de h^{-1} ?

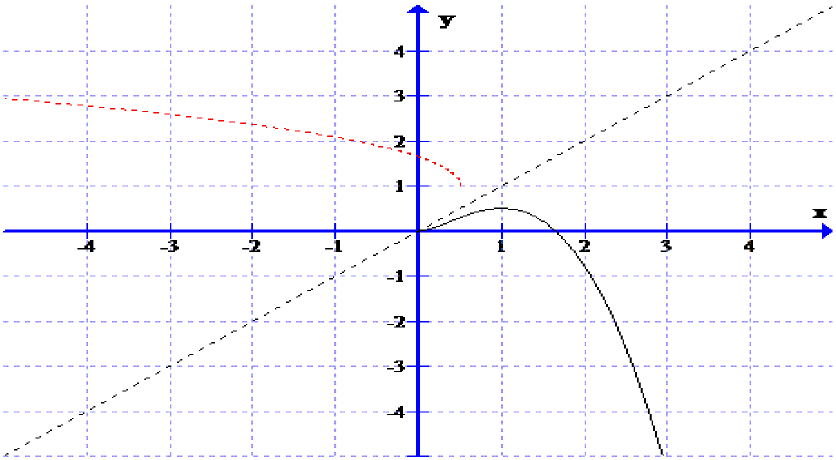
h étant dérivable et de dérivée non nulle sur]1 ; +∞[, h^{-1} est dérivable *sur h( ]1 ; +∞[ )* =]- ∞ ; $\frac{1}{2}$ [.

c) Résolution de l'équation $h^{-1}(x)$ = e ?

$h^{-1}(x)$ = e ssi x = *h(e)* = $\frac{-e^2}{2}$;

d'où l'ensemble des solutions S ={ $\frac{-e^2}{2}$ }.

d) Tracé de la courbe de g et celle de h^{-1} ?



Légende : — Tracé de C_g ;

— Tracé de $C_{h^{-1}}$

Exercice 5

***f(x)* = (2*x*+1) e^{-x}**

1. Variation de *f* ?

∗ *f(x)* existe sur ℝ ; D_f = ℝ =]- ∞ ; +∞[.

∗ *f '(x)* = 2e^{-x} - (2*x*+1) e^{-x} = e^{-x} (1- 2*x*).

f '(x) ≥ 0 ssi 1- 2*x* ≥ 0 ssi $x \leq \frac{1}{2}$.

∗ Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{\frac{-1}{2}}$	$\searrow$	0

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$,

par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-x} + e^{-x} = ?$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. (C) coupe (Δ) : y = x en un unique point ?

(C) coupe (Δ) : y = x en un unique point d'abscisse α sur $[1 ; \frac{3}{2}]$ ssi l'équation $f(x) = x$ admet α comme une unique solution sur $[1 ; \frac{3}{2}]$.

ssi l'équation $f(x) - x = 0$ admet α comme une unique solution sur $[1 ; \frac{3}{2}]$.

Soit $g(x) = f(x) - x$;

g étant la somme de fonctions continues et dérivables sur $[1 ; \frac{3}{2}]$, g est continue et dérivable sur $[1 ; \frac{3}{2}]$.

$g'(x) = f'(x) - 1$; or $f'(x) < 0$ sur $[1 ; \frac{3}{2}]$,

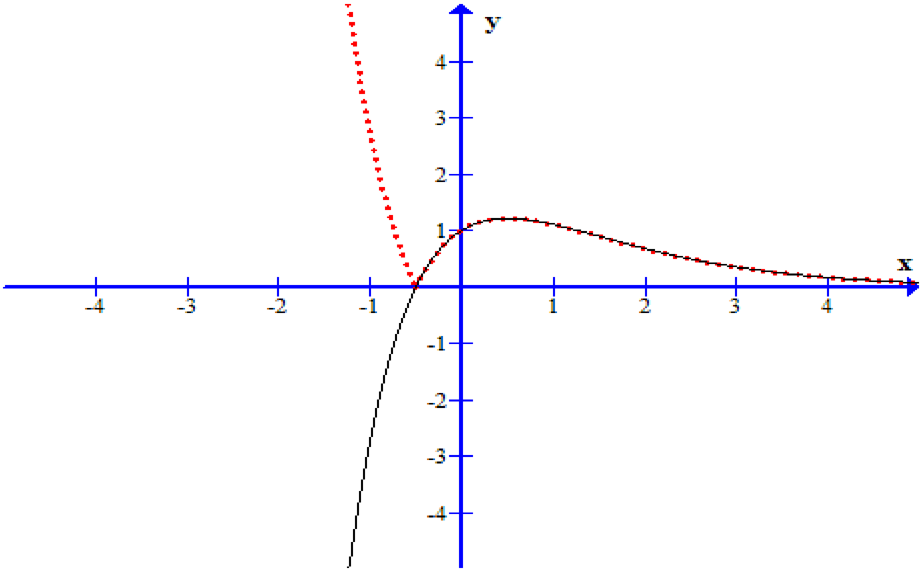
donc $g'(x) < 0$ sur $[1 ; \frac{3}{2}]$.

$g(1) = 3e^{-1} - 1 \cong 0{,}1$; $g(\frac{3}{2}) = 4e^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \cong -0{,}6$.

g est continue et strictement décroissante sur $[1 ; \frac{3}{2}]$; de plus

$g(1)g(\frac{3}{2}) < 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\ ;\ \frac{3}{2}]$. Par conséquent (C) coupe (Δ) en un unique point d'abscisse α appartenant à $[1\ ;\ \frac{3}{2}]$.

3. Tracé de (C) ?



Légende : — Tracé de C_f
— Tracé de C_g

4. a) *f* admet une bijection réciproque sur $]\frac{1}{2}\ ;+\infty[$?

f étant continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}\ ;+\infty[$, *f* est une bijection de $]\frac{1}{2}\ ;+\infty[$ sur $f(]\frac{1}{2}\ ;+\infty[) =]0\ ;2e^{\frac{-1}{2}}[$;

par conséquent elle admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $]0\,;\,2e^{\frac{-1}{2}}[$.

b) Image de $]0\,;\,\alpha]$ par f^{-1} ?

f^{-1} est continue et strictement décroissante (car elle varie dans le même sens que f) ;

d'où $f^{-1}(]0\,;\,\alpha]) = [f^{-1}(\alpha)\,;\,\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)[$;

Or g(α) = 0 donc on a $f(\alpha) = \alpha$ d'où $\alpha = f^{-1}(\alpha)$.

D'autre part $f(]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[) =]0\,;\,2e^{\frac{-1}{2}}[$

ssi $f^{-1}(]0\,;\,2e^{\frac{-1}{2}}[) =]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$

ssi $]f^{-1}(2e^{\frac{-1}{2}})\,;\,\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)[=]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$;

d'où $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x) = +\infty$ et par conséquent

$f^{-1}(]0\,;\,\alpha]) = [\alpha\,;\,+\infty[$

5. Tracé de la courbe de g ?

$g(x) = |2x+1|e^{-x} = |2x+1||e^{-x}|$

$= |(2x+1)\,e^{-x}| = |f(x)|$; d'où $g(x) = \begin{cases} f(x) \ si\ f(x) \geq 0 \\ -f(x)\ si\ f(x) \leq 0 \end{cases}$.

Par conséquent :

- Si $f(x) \geq 0$ (c'est-à-dire C_f au dessus de l'axe $(x'x)$) alors C_g et C_f sont confondues.
- Si $f(x) \leq 0$ (c'est-à-dire C_f au dessus de l'axe $(x'x)$) alors C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe $(x'x)$.

Chapitre 4 : NOMBRES COMPLEXES SIMILITUDES DIRECTES

Exercice 1

Forme algébrique de :

1) $*\ \boldsymbol{z_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2-i\sqrt{3}}} = \frac{1(2+i\sqrt{3})}{2^2+\sqrt{3}^2}$; d'où $z_1 = \frac{2}{7} + i\,\frac{\sqrt{3}}{7}$.

$*\ \boldsymbol{z_2} = \frac{\boldsymbol{i-3}}{\boldsymbol{-1-2i}} = \frac{(i-3)(-1+2i)}{1^2+2^2}$; d'où $z_2 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}$ i.

2) $*\ \boldsymbol{Z_1}$ **= (z + 2)(2z – i)** $= [(x+2)+iy][2x+i(2y-1)]$

$= [2x(x+2) - y(2y-1)] + i[y(2x) + (x+2)(2y-1)]$

$= (2x^2 + 4x - 2y^2 + y) + i(2xy + 2xy - x + 4y - 2)$

$= (2x^2 + 4x - 2y^2 + y) + i(4xy - x + 4y - 2)$.

$*\ \boldsymbol{Z_2} = \frac{\boldsymbol{z+1-i}}{\boldsymbol{z-2}} = \frac{x+1+i(y-1)}{x-2+iy}$

$= \frac{[(x+1)+i(y-1)][(x-2)-iy]}{(x-2)^2+y^2}$

$= \frac{[(x+1)(x-2)+y(y-1)]+\,i[(y-1)(x-2)-y(x+1)]}{(x-2)^2+y^2}$

$= \frac{x^2-x+y^2-y-2}{(x-2)^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-x-3y+2}{(x-2)^2+y^2}$.

Exercice 2

Forme trigonométrique et exponentielle de :

1) **z = 1 – i** $\boldsymbol{\sqrt{3}} = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\,\left(\frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 2[\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3})] = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) **z = -1- i** $= \sqrt{1^2+1^2}\,\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

3) **z = -** $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ **+ i** $\boldsymbol{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}\,\left(\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}i\right)$

$= 2\sqrt{2}\,\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$= 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

4) $\mathbf{z = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta}$ = (2cos θ)(- sin θ + icos θ)

<u>1er cas</u>: Si $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, cos $\theta > 0$, d'où

z = (2cos θ)[cos($\frac{\pi}{2} + \theta$) + isin($\frac{\pi}{2} + \theta$)] = $(2\cos\theta)e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$.

<u>2eme cas</u>: Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \pi]$, cos $\theta < 0$ d'où

z = (-2cos θ)(sin θ- icos θ)

= (-2cos θ)[cos($\frac{\pi}{2} - \theta$) - isin($\frac{\pi}{2} - \theta$)]

= (-2cos θ)[cos($\theta - \frac{\pi}{2}$) + isin($\theta - \frac{\pi}{2}$)] = $(-2\cos\theta)e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$.

<u>3eme cas</u>: Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, cos $\theta = 0$ d'où z = 0.

5) $\boldsymbol{z = 1 + \cos x + i\sin x}$ = $2\cos^2(\frac{x}{2}) + 2i\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$

$= 2\cos(\frac{x}{2})[\cos(\frac{x}{2}) + i\sin(\frac{x}{2})]$.

Or $\pi < x < 2\pi$ donc $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$,

d'où $\cos(\frac{x}{2}) < 0$ et par conséquent

$z = -2\cos(\frac{x}{2})[-\cos(\frac{x}{2}) - i\sin(\frac{x}{2})]$

$= -2\cos(\frac{x}{2})[\cos(\pi + \frac{x}{2}) + i\sin(\pi + \frac{x}{2})] = -2\cos(\frac{x}{2})e^{i(\pi+\frac{x}{2})}$.

<u>Exercice 3</u>

A(1; -3) , B(4; 5) et C(-3; 2)

1. Affixe de *A*, *B*, *C*, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$?

$*\ z_A$ = 1 – 3i. $*\ z_B$ = 4 + 5i. $*\ z_C$ = -3 + 2i.

$*\ z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ = 3 + 8i. $*\ z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$ = -4 + 5i.

$*\ z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$ = -7- 3i.

2. Affixe de *I* milieu de *[AB]* et de *G* barycentre de *(A ; 1)*, *(B ; 2)*, *(C ; 3)*?

$*\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{5+2i}{2}$. $*\ z_G = \frac{(1)z_A + (2)z_B + (3)z_C}{6} = \frac{13i}{6}$.

3. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$, z_D et z_E?

$*\ \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; en passant aux affixes, on obtient

$z_D - z_A = 2(z_B - z_A) + z_C - z_A$ ssi $z_D = 2z_B - 2z_A + z_C = 3 + 18i$.

$*\ 3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$; en passant aux affixes, on obtient

$3(z_E - z_B) = z_C - z_B$ ssi $z_E = \frac{2z_B+z_C}{3} = \frac{5+12i}{3}$.

4. A, D, E alignés ?

Montrons qu'il existe un nombre réel k, tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$?

En passant aux affixes, on obtient $z_D - z_A = k(z_E - z_A)$;

d'où $k = \frac{z_D-z_A}{z_E-z_A}$. Or $\frac{z_D-z_A}{z_E-z_A} = 3$ donc k = 3;

k étant un réel, les points $A, D\ et\ E$ sont alignés.

<u>Exercice 4</u>

$a = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $b = -5(1+ i\sqrt{3})$

1. Module et argument de *a*, *b* et $\frac{b}{a}$?

$*\ a = 5\sqrt{2}\,[\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)] = 10(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$,

d'où $|a| = 10$ et $\arg a = \frac{\pi}{4}$.

$*\ b = 5[\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}(\frac{-1}{2} + i\,\frac{-\sqrt{3}}{2})] = 10(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$,

d'où $|b| = 10$ et $\arg b = \frac{4\pi}{3}$.

$*\ |\frac{b}{a}| = \frac{|b|}{|a|} = 1$; $\arg(\frac{b}{a}) = \arg b - \arg a = \frac{13\pi}{12}$

2. Forme algébrique et trigonométrique de Z ?

$*\ Z = \frac{b}{a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$,donc $Z = \frac{(-1-i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}$

d'où $Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (1)

* $Z = \frac{b}{a}$; or $|\frac{b}{a}| = 1$ et $\arg(\frac{b}{a}) = \frac{13\pi}{12}$.

donc $Z = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$ (2)

3. Valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$?

D'après les égalités (1) et (2), on a

$\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. (car deux nombres complexes sont égaux s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire).

Remarque

Pour déterminer le module et l'argument de Z, il était possible d'utiliser la forme exponentielle de a et b comme ci-dessous :

$Z = \frac{b}{a} = \frac{10e^{i\frac{4\pi}{3}}}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}$. d'où $Z = e^{i(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{13\pi}{12}}$; d'où

$|Z| = 1$ et $\arg Z = \frac{13\pi}{12}$.

Exercice 5

$\boldsymbol{z = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

1. Calcul de z^2?

$z^2 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + i^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$= 8\sqrt{3} + 8i$

2. Module et argument de z^2 ?

$z^2 = 8[\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)] = 16\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$;

d'où $|z^2| = 16$ et $\arg z^2 = \frac{\pi}{6}$.

* **Module et argument de z ?**

$|z^2| = 16$ ssi $|z|^2 = 16$ ssi $|z| = 4$.

$\arg z^2 = \frac{\pi}{6}$ ssi $2\arg z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ssi $\arg z = \frac{\pi}{12} + k\pi$;

donc $\arg z = \frac{\pi}{12}$.

3. ***n* ? z^n imaginaire pur ?**

$z^n \in i\mathbb{R}^*$ ssi arg $z^n = \frac{\pi}{2}$ + kπ ssi narg z = $\frac{\pi}{2}$ + kπ

ssi n($\frac{\pi}{12}$) = $\frac{\pi}{2}$ + kπ ssi n = 6 + 12kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$.

<u>Autre méthode</u>

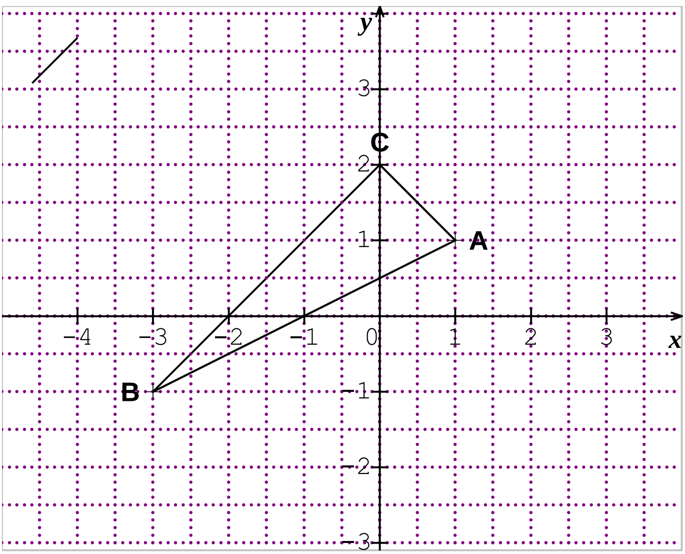
$z^n = [4\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)]^n = 4^n(cos\frac{n\pi}{12} + isin\frac{n\pi}{12})$ (Moivre)

z^n imaginaire pur ssi Re(z^n) = 0 ssi $cos\frac{n\pi}{12}$ = 0 ssi $\frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ + kπ .

Exercice 6

A(1+ i) ; B(-3- i) ; C(2i)

1. Pour placer ces points, on détermine leurs coordonnées : A(1 ; 1), B(-3 ; -1) et C(0 ; 2).



Nature du triange ABC ?

AB = $|z_B - z_A|$ = |-4 – 2i|, d'où AB = $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$.

AC = $|z_C - z_A|$ = |- 1+ i|, d'où AC = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

BC = $|z_C - z_B|$ = |3+ 3i|, d'où BC = $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$.

$AC^2 + BC^2$ = 2 + 18 = 20

$= \sqrt{20}^2 = BC^2$; donc ABC est un triangle rectangle en C.

<u>Autres méthodes</u>

En représentant les points, on voit que ABC est un triangle rectangle en C et pour le démontrer :

a) il suffit de prouver que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$?

$\overrightarrow{AC}$ (-1 ; 1) et $\overrightarrow{BC}$ (3 ; 3). $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ = (-1)(3) + (1)(3) = 0 d'où $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ orthogonaux et par conséquent ABC est un triangle rectangle en C.

b) il suffit de prouver que ($\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$) = $\pm\frac{\pi}{2}$?

($\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$) = arg($\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$) = arg($\frac{-3-3i}{1-i}$),

donc ($\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$) = arg(- 3i) = arg($3e^{-i\frac{\pi}{2}}$), d'où ($\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$) = - $\frac{\pi}{2}$ et par conséquent, le triangle ABC est rectangle en C.

2. D ?, ADBC parallélogramme.

ADBC parallélogramme ssi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$; en passant aux affixes, on obtient z_D - z_A = z_B - z_C ssi z_D = z_B - z_C + z_A = -2 - 2i.

3. Ensemble des points M(z) tels que

a) |z – 2i| = 3 ?

Soit z = x + iy.

|z – 2i| = 3 ssi |x + i(y – 2)| = 3 ssi $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3$

ssi $x^2 + (y-2)^2 = 9$. d'où cet ensemble est le cercle de centre I(0 ; 2) et de rayon 3. (on remarque que I est le point C)

<u>Autre méthode</u>

|z – 2i| = 3 ? Or M(z) et C(2i),

donc |z – 2i| = 3 ssi $|z_M - z_C|$ = 3 ssi CM = 3; d'où l'ensemble des points M est le cercle de centre C et de rayon 3.

b) |z – 1- i| = |z + 3 + i| ssi |z – (1+ i)| = |z – (-3- i)|

ssi $|z_M - z_A|$ = $|z_M - z_B|$ ssi AM = BM ; d'où cet ensemble de points est la médiatrice du segment [AB].

c) $|\bar{z}$ - 1+ i| = 1 ssi $|\overline{\bar{z} - 1 + i}| = 1$ ssi |z – 1 – i| = 1

ssi $|z_M - z_A| = 1$ ssi AM = 1 ;

d'où cet ensemble est le cercle de centre A et de rayon 1.

d) |iz + 2| = 3 ssi $|i(z + \frac{2}{i})| = 3$ ssi |i||z – 2i| = 3 ssi $|z_M - z_C| = 3$ ssi CM = 3; d'où l'ensemble des points M est le cercle de centre C et de rayon 3.

<u>Remarque</u>

On retrouve les mêmes résultats pour les questions b), c) et d) en posant $z = x + iy$ et en calculant les modules.

<u>Exercice 7</u>

Z = $\frac{z+1}{z-2i}$. Ensemble des points tels que :

1. Z soit un réel ?

Soit $z = x + iy$; $Z = \frac{(x+1)+iy}{x+i(y-2)} = \frac{[(x+1)+iy][x-i(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}$; d'où

$$Z = \frac{[x(x+1)+y(y-2)]+i[yx-(x+1)((y-2)]}{x^2+(y-2)^2} = \frac{(x^2+x+y^2-2y)+i(2x-y+2)}{x^2+(y-2)^2}.$$

Z est un réel ssi Im(Z) = 0 ssi $2x - y + 2 = 0$; d'où cet ensemble est la droite (d) : $2x - y + 2 = 0$ privée du point A(2i).

<u>Autres méthodes</u>

a) Soit $z = x + iy$. Z est un réel ssi $Z = \bar{Z}$ ssi $\frac{z+1}{z-2i} = \overline{(\frac{z+1}{z-2i})}$

ssi $\frac{z+1}{z-2i} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+2i}$

ssi $2i(z + \bar{z}) - (z - \bar{z}) + 4i = 0$;

or $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$ et $z\bar{z} = x^2 + y^2$ donc

$2i(z + \bar{z}) - (z - \bar{z}) + 4i = 0$ ssi $2x - y + 2 = 0$;

d'où l'ensemble des points M est la droite (d) : $2x - y + 2 = 0$ privée du point A(2i)

b) $Z = \frac{z+1}{z-2i} = \frac{z-(-1)}{z-2i} = \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$, où A(2i) et B(-1).

Z est un réel

ssi $z_M = z_B$ ou arg($\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$) = $0(\pi)$ dans le cas $z_M \neq z_B$.

ssi $z_M = z_B$ ou ($\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$) = $0(\pi)$

Donc cet ensemble est B ou la droite (AB) privée de A et B ;

Autrement, l'ensemble des points M(z) tels que Z soit réel est la droite (AB) privée de A.

2. Z soit un imaginaire pur ?

Z = $\frac{(x^2+x+y^2-2y)+i(2x-y+2)}{x^2+(y-2)^2}$

Z est un imaginaire pur ssi Re(Z) = 0

ssi $x^2 + x + y^2 - 2y = 0$

ssi $(x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 - (1)^2 = 0$

ssi $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$; d'où cet ensemble est le cercle de centre J(- $\frac{1}{2}$; 1) et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point A.

__**Autres méthodes**__

a) Z est un imaginaire pur ssi Z = - $\bar{Z}$. On procède comme pour la question 1), en faisant apparaître z + $\bar{z}$, z - $\bar{z}$ et $z\bar{z}$ et en posant $z = x + iy$ pour obtenir l'équation du cercle.

b) Z = $\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$.

Z est un imaginaire pur

ssi $z_M = z_B$ ou arg($\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$) = $\frac{\pi}{2}(\pi)$ ($z_M \neq z_B$)

ssi $z_M = z_B$ ou ($\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$) = $\frac{\pi}{2}(\pi)$

Donc cet ensemble est B ou le cercle de diamètre [AB] privée de A et B ;

Autrement, l'ensemble des points M(z) tels que Z soit un imaginaire pur est le cercle de diamètre [AB] privé de A.

3. Z est un réel strictement positif

ssi arg($\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$) = $0(2\pi)$

ssi $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0(2\pi)$;

d'où cet ensemble est la droite (AB) privée du segment [AB].

4. Z = bi, b $<$ 0 (ou bien Z $\in$ $\boldsymbol{i}\mathbb{R}_-^*$)

ssi $\arg(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}) = \frac{-\pi}{2}(2\pi)$

ssi $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{-\pi}{2}(2\pi)$;

d'où cet ensemble est l'un des demi-cercles de diamètre [AB], privé des points A et B.

<u>Remarque</u>

Pour déterminer de quel demi-cercle il s'agit, on représente le cercle de diamètre [AB], puis on détermine lequel des demi-cercles a ses points M qui vérifient $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{-\pi}{2}$.

5. |Z| = 1 ?

Z = $\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$;

|Z| = 1 ssi $\frac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = 1$

ssi $\frac{BM}{AM} = 1$ ssi AM = BM ;

d'où cet ensemble est la médiatrice du segment [AB].

<u>Exercice 8</u>

1. *sin5x* en fonction de *cosx et sinx* ?

$*\ (cosx + isinx)^5 = cos5x + isin5x$ (1) (en utilisant la formule de Moivre)

$*\ (cosx + isinx)^5 = cos^5x + 5(cos^4x)(\text{isinx}) + 10(cos^3x)(isinx)^2 + 10(cos^2x)(isinx)^3 + 5(cosx)(isinx)^4 + (isinx)^5$. (en utilisant la formule du binôme de Newton)

Donc $(cosx + isinx)^5 = cos^5x - 10cos^3xsin^2x + 5\text{cosx}sin^4x$
$+ \text{i}(5cos^4x\text{sinx} - 10cos^2xsin^3x + sin^5x)$ (2)

D'après (1) et (2) on a

sin5x $= 5cos^4x\text{sinx} - 10cos^2xsin^3x + sin^5x$.

2. Linéariser cos^3xsin^2x ?

$cos^3xsin^2x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^2$

$= \frac{-1}{32}[(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})$

$= \frac{-1}{32}[(e^{5ix} + e^{-5ix}) + (e^{3ix} + e^{-3ix}) - 2(e^{ix} + e^{-ix})]$

$= \frac{-1}{32}(2\cos 5x + 2\cos 3x - 4\cos x)$

$= \frac{-1}{16}(\cos 5x + \cos 3x - 2\cos x)$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $\boldsymbol{\frac{iz}{z+i} = 1 + 2i}$. l'équation existe ssi $z \neq -i$.

$\frac{iz}{z+i} = 1 + 2i$ ssi $iz = (z + i)(1+ 2i)$ ssi $z(1+ i) = 2 - i$ ssi $z = \frac{1-3i}{2}$

L'ensemble des solutions $S = \{\frac{1-3i}{2}\}$.

2) $\boldsymbol{z^2 + z - 6 = 0}$; $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-6) = (5)^2$.

$z_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$; $z_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$ d'où $S = \{-3 ; 2\}$

3) $\boldsymbol{4z^2 + 4z + 1 = 0}$; $\Delta' = (2)^2 - (4)(1) = 0$

$z_0 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$, d'où $S = \{\frac{-1}{2}\}$.

4) $\boldsymbol{z^2 + z + 1 = 0}$; $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$. $\Delta = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ d'où $S = \{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$.

5) $\boldsymbol{z^2 = 3 - 4i}$; résoudre cette équation revient à déterminer les racines carrées de 3 – 4i. Soit $z = x + iy$;

$$z^2 = 3 - 4i \text{ ssi } \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

En calculant (1) + (2) et (1) – (2), on obtient :

$$\text{on obtient } \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

D'où S = { 2 – i ; -2 + i}.

6) $\boldsymbol{z^2 + 2iz - 1 - i = 0}$; $\Delta' = (i)^2 - (1)(-1-i) = i$.

Déterminons les racines carrées de Δ', c'est-à-dire les complexes $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta'$.

$$\delta^2 = \Delta' \text{ ssi } \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{0^2 + 1^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = 1 & (3) \end{cases}$$

En calculant (1) + (2) et (1) – (2), on obtient :

$$\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

D'où $\Delta' = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^2$. Par conséquent

$z_1 = -i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = -i - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$S = \{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) ; \frac{-\sqrt{2}}{2} + i(\frac{-\sqrt{2}}{2} - 1) \}$.

<u>Exercice 10</u>

(E) : $\boldsymbol{z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0}$

1. a) (E) admet une solution réelle ?

Soit a cette solution réelle : on a

$a^3 - (3+2i)a^2 + (1+4i)a + 1 - 2i = 0$

a^3 - $3a^2$ + a + 1 + i(- $2a^2$ + $4a$ – 2) = 0

$$\begin{cases} a^3 - 3a^2 + a + 1 = 0 & (1) \\ -2a^2 + 4a - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolvons (2). (L'équation la plus simple).

$-2a^2 + 4a - 2 = 0$ ssi - $2(a-1)^2$ = 0 ssi a = 1.

Vérifions si 1 est solution de l'équation (1) :

$(1)^3 - 3(1)^2 + (1) + 1$ = 3 – 3 = 0 donc (E) admet une solution réelle a = 1.

b) Résolution de (E) ?

a = 1 solution de de (E) donc (E) : (z-1)Q(z) = 0.

Déterminons Q(z) par la méthode de Horner :

	1	- 3 – 2i	1 + 4i	1 – 2i
(1)		1	- 2 – 2i	-1 + 2i
	1	- 2 – 2i	-1 + 2i	0

d'où Q(z) = z^2+ (- 2 – 2i) z – 1 + 2i .

Par consequent (E) ⇔ z = 1 ou z^2+ (- 2 – 2i) z – 1 + 2i = 0

Δ' = $(-1-i)^2$ - (1)(-1+2i)

= 1 = $(1)^2$

z_1 = 1+ i – 1 = i ; z_2 = 1+ i + 1 = 2+ i

S = { 1 ; 2+ i ; i }

2. z_A = 1 ; z_B = i ; z_C = 2+ i.

a) Module et argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$?

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+i-1}{i-1} = \frac{1+i}{-1+i}$; donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ = - i = $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

D'où $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$ = 1 et arg($\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$) = $\frac{-\pi}{2}$.

<u>Remarque</u> : En calculant quotient $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ si on obtient une forme algébrique pour laquelle on ne peut pas déterminer l'argument, alors on contourne la difficulté en déterminant d'abord un argument du numérateur, puis un argument du dénominateur.

b) Nature du triangle ABC

$*\ \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ ssi $\frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1$ ssi $\frac{AC}{AB} = 1$ ssi AB = AC ;

d'où ABC est un triangle isocèle en A (1)

$*$ arg($\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$) = $\frac{-\pi}{2}$ ssi ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) = $\frac{-\pi}{2}$

d'où ABC est un triangle rectangle en A (2)

Il résulte des propositions (1) et (2) que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

c) r = r (B ; $\frac{\pi}{2}$) . z_D ?, r (A) = D

r(A) = D ssi z_D - z_B = $e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B)$ ssi z_D = i(1 – i) + i = 1 + 2i .

d) Montrons que A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon?

$*$ ABC étant un triangle rectangle A, donc les points A, B et C appartiennent à leur cercle circonscrit qui est le cercle (C) de diamètre [BC].

$*$ Soit I son centre et R son rayon :

I est le milieu de [BC] et R = $\frac{BC}{2}$, d'où

$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = 1 + i$; R = $\frac{BC}{2} = \frac{|z_C - z_B|}{2}$ donc R = 1.

$*$ Montrons que D appartient à (C), c'est-à-dire ID = 1 ?

ID = $|z_D - z_I|$ = 1 donc D $\in$ (C) et par conséquent les points A, B, C et D appartiennent à (C).

Exercice 11

1. Résoudre $z^3 = 1$?

Résoudre cette équation revient à déterminer les racines cubiques de 1 qui sont les complexes $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où k $\in \{O;1;2\}$ Donc les solutions sont :

$z_0 = e^{i0} = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$ **= ?**

$(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^3 - 3\left(\sqrt{2}\right)^2(i\sqrt{2}) + 3(\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 - (i\sqrt{2})^3$

$= -4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(-1-i)$

b) Solutions de (E) : $\boldsymbol{z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)}$ **?**

$z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$ ssi $z^3 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$ ssi $\left(\frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^3 = 1$;

En posant u = $\frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, on obtient $u^3 = 1$.

D'après la question 1) les solutions de cette équation sont les complexes $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où k $\in \{O;1;2\}$;

or $u_k = \frac{z_k}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, donc les solutions de (E) sont les complexes

$z_k = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\, u_k = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\, e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où k $\in \{O;1;2\}$.

* **Forme algébrique des solutions de (E) ?**

$z_0 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(1) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

$z_1 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$.

$z_2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$.

* **Forme trigonométrique des solutions de (E) ?**

$z_k = \sqrt{2}(1-i)\, e^{i\frac{2k\pi}{3}} = \sqrt{2}.\sqrt{1^2+1^2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{-1}{\sqrt{2}})\, e^{i\frac{2k\pi}{3}}$

$= 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$. D'où

$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i0} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$; donc $z_0 = 2[\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4})]$.

$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$; donc $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$.

$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$; donc $z_1 = 2(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$.

3. Valeurs exactes de cos $\frac{5\pi}{12}$ et sin $\frac{5\pi}{12}$?

D'après la question 2.b)

$z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$; il en résulte :

$$\begin{cases} 2\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

<u>Exercice 12</u>

1. $z^7 = 1$?

Résoudre cette équation revient à déterminer les racines septièmes de 1 qui sont les complexes $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ où $k \in \{0; 1; ... ; 6\}$. Donc les solutions sont : $z_0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{7}}$; $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{7}}$; $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{7}}$; $z_5 = e^{i\frac{10\pi}{7}}$; $z_6 = e^{i\frac{12\pi}{7}}$.

2. Calcul de $1 + u^1 + u^2 + \cdots + u^6$, où u = $e^{i\frac{2\pi}{7}}$?

Soit S cette somme ; S est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison u, donc S = $1(\frac{1-u^7}{1-u}) = \frac{1-(e^{i\frac{2\pi}{7}})^7}{1-e^{i\frac{2\pi}{7}}}$.

Or $(e^{i\frac{2\pi}{7}})^7 = e^{i2\pi} = 1$, donc S = 0.

3. $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = 0$?

$1 + u^1 + u^2 + \cdots + u^6 = 0$

$1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + \ldots + e^{i\frac{12\pi}{7}} = 0$

$1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \ldots + \cos\frac{12\pi}{7} + i(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \ldots + \sin\frac{12\pi}{7}) = 0$.

D'où $1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = 0$

$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos(2\pi-\frac{6\pi}{7})+\cos(2\pi-\frac{4\pi}{7})+\cos(2\pi-\frac{2\pi}{7})=0$

$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=0$

$1+2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}=0.$

Exercice 13

f **M(z) → M'(z'), z' = (1+ i)z - 1 .**

1. *f* similitude directe ?

z' est de la forme $az+b$ où a = 1+ i et b = -1.

$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, donc *f* est une similitude directe.

⁎ Eléments caractéristiques de *f* ?

Soit $\Omega(\omega)$ son centre, k son rapport et θ son angle :

$\omega = \frac{b}{1-a}$ = - i .

k = | a | ; or $a = \sqrt{1^2+1^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc k = $\sqrt{2}$.

$\theta = \arg a = \frac{\pi}{4}$.

2. Image par *f* de (d) : *x – y + 2 = 0* ?

Déterminons 2 points A et B de (d) à l'aide d'un tableau de valeurs et leurs images A' et B' :

x	-2	0
y	0	2

Soit A(-2) et B($2i$) ; la droite (d) est la droite (AB).

$z_{A'}$ = (1+ i)(-2) - 1 = -3 -2i ; $z_{B'}$ = (1+ i)($2i$) - 1 = -3+ 2i.

L'image de (d) par *f* est (d') la droite (A'B').

⁎ **Image par *f* du cercle (C) de centre *I(1- i)* et de rayon R = 2 ?**

Soit *I' = f(I),* on a $z_{I'}$ = (1+ i)(1-i) - 1 = 1.

L'image par *f* de (C) est le cercle (C') de centre *I'(1)* et de rayon kR = $2\sqrt{2}$; k étant le rapport de la similitude.

Exercice 14

A(-1) ; B(-2 + i) ; C(i) et D(1- 2i)

1. s? , s(A) = B et s(C) = D

Soit $z' = az + b$, l'écriture complexe de la similitude s:

$\begin{cases} s(A) = B \\ s(C) = D \end{cases}$ ssi $\begin{cases} az_A + b = z_B & (1) \\ az_C + b = z_D & (2) \end{cases}$

(1) – (2) entraine que $a(z_A - z_C) = z_B - z_D$

d'où $a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$ = - 3i ;

or $az_A + b = z_B$ donc $b = z_B - az_A$ = -2 – 2i.

d'où l'écriture complexe de s est z' = -3iz -2 -2i

2. Eléments caractéristiques de s' ?

Soit Ω son centre, k son rapport et θ son angle.

* s'(A) = A donc A = Ω.
* s'(B) = C donc k = $\frac{AC}{AB} = |\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}|$ et $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})$.

Or $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+i}{-1+i}$ = - i donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ d'où k = 1 et $\theta = \frac{-\pi}{2}$.

<u>Remarque</u> : la similitude s' de centre A, de rapport 1 et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

3. Expression analytique de s''?

s'' a pour centre C, pour angle $\frac{\pi}{3}$ et pour rapport 2, donc elle a pour écriture complexe $z' - z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$;

d'où z' = $(1+ i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.

Posons $z' = x' + iy'$ *et* $z = x + iy$,

on a $x' + iy' = (1 + i\sqrt{3})(x+iy) + \sqrt{3}$

$= x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y)$;

d'où $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$ est l'expression analytique de s''.

Chapitre 5 : SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_0 = 1} \\ \boldsymbol{U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1}} \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{V_n = \frac{1}{U_n}}$$

1. Calcul de $\boldsymbol{U_1}$, $\boldsymbol{U_2}$, $\boldsymbol{V_0}$ et $\boldsymbol{V_1}$?

$U_1 = \frac{U_0}{U_0+1} = \frac{1}{2}$. $U_2 = \frac{U_1}{U_1+1} = \frac{1}{3}$. $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$. $V_1 = \frac{1}{U_1} = 2$.

2. $(\boldsymbol{V_n})$ suite arithmétique ?

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n+1}{U_n} - \frac{1}{U_n}$; donc $V_{n+1} - V_n = \frac{U_n}{U_n} = 1$.

1 étant une constante, (V_n) est une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$.

3. $\boldsymbol{V_n}$ et $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de n ?

(V_n) étant une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$, on a $V_n = V_0 + nr = 1 + n$.

Or $V_n = \frac{1}{U_n}$, donc $U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{1+n}$.

4. $\boldsymbol{S_n}$ en fonction de n ?

$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n = (n + 1)(\frac{V_0+V_n}{2})$;

d'où $S_n = (n + 1)(\frac{1+1+n}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

5. Convergence des suites $(\boldsymbol{V_n})$, $(\boldsymbol{U_n})$ et $(\boldsymbol{S_n})$?

$*\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n = +\infty$;

donc (V_n) est divergente.

$*\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; donc (U_n) est convergente.

$*\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} = +\infty$;

donc (V_n) est divergente.

Exercice 2

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_1 = 2} \\ \boldsymbol{U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2} \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{V_n = U_n + 3}$$

1. V suite géométrique ?

$V_{n+1} = U_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}U_n + 1$

$\quad = \frac{U_n + 3}{3} = \frac{V_n}{3}$.

d'où $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$ et par conséquent la suite V est une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{3}$ et de premier terme $V_1 = U_1 + 3 = 5$.

2. U_n en fonction de n ?

Pour déterminer U_n en fonction de n, on commence par déterminer V_n en fonction de n.

(V_n) étant une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{3}$ et de premier terme $V_1 = 5$, on a $V_n = V_1 q^{n-1} = 5(\frac{1}{3})^{n-1}$.

Or $V_n = U_n + 3$, donc $U_n = V_n - 3 = 5(\frac{1}{3})^{n-1} - 3$.

3. S_n et S'_n en fonction de n ?

$* \ S_n = V_1 + \ldots + V_n = V_1 (\frac{1-q^n}{1-q})$

$\quad = 5[\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}] = \frac{15}{2} [1 - (\frac{1}{3})^n]$.

$* \ S'_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = V_1 - 3 + V_2 - 3 + \ldots + V_n - 3$

$\quad = S_n - 3n = \frac{15}{2} [1 - (\frac{1}{3})^n] - 3n$.

4. Limite de V_n, U_n, S_n et S'_n ?

$* \ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5(\frac{1}{3})^{n-1} = 0$.

(car $-1 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim(\frac{1}{3})^{n-1} = 0$)

$* \ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n - 3 = -3$ (car $\lim V_n = 0$)

$*\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim \frac{15}{2}\,[1-(\frac{1}{3})^n] = \frac{15}{2}$.

$*\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ - 3n = - ∞

<u>Exercice 3</u>

U_0 = 4 et U_{n+1} = $\sqrt{3U_n - 2}$

1. Montrons par récurrence que $U_n \geq 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$?

∗ Vérifions que l'inégalité est vraie au premier rang ; c'est à dire $U_0 \geq 2$?

U_0 = 4, donc $U_0 \geq 2$.

∗ Supposons que l'inégalité est vraie à un rang p, supérieur au premier rang ; c'est-à-dire $U_p \geq 2$.

∗ Montrons que l'inégalité est vraie au rang p+1, c'est-à-dire $U_{p+1} \geq 2$?

On a $U_p \geq 2$ ssi $3U_p \geq 6$ ssi $3U_p - 2 \geq 4$ ssi $\sqrt{3U_p - 2} \geq 2$ d'où $U_{p+1} \geq 2$.

L'inégalité étant vraie au rang p+1, donc elle est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$. D'où $U_n \geq 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Monotonie de U ?

U_{n+1} - U_n = $\sqrt{3U_n - 2}$ - U_n = $\frac{3U_n - 2 - U_n{}^2}{\sqrt{3U_n - 2} + U_n}$;

U_{n+1} - U_n a le même signe que $-U_n{}^2 + 3U_n - 2$.

Posons U_n = X et cherchons le signe de - X^2 + 3X – 2.

X_1= 1 ; 1X_2 = $\frac{-2}{-1}$ ssi X_2 = 2.

x	-∞	1	2	+∞
-X^2 + 3X - 2	-	+	-	

$U_n \geq 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc X ≥ 2 ; or - X^2 + 3X – 2 ≤ 0 sur [2 ; +∞[, donc $-U_n{}^2 + 3U_n - 2 \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

d'où U_{n+1} - $U_n \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et par conséquent la suite U est décroissante.

3. En déduire que U converge vers L ?

La suite U étant décroissante et minorée, donc elle converge vers L. Déterminons L ?

* U_{n+1} = f(U_n) où $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

f étant la composée de fonctions continues sur leurs ensemble de définition, donc f est continue sur son ensemble de définition $[\frac{2}{3} ; +\infty[$.

* Résolvons l'équation $f(x) = x$;

f(x) = x ssi $\sqrt{3x-2}$ = x ssi $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x-2 = x^2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \; ou \; x = 2 \end{cases}$

S = {1 ; 2}.

L étant une solution de l'équation $f(x) = x$ et f étant continue en L, donc L = 1 où L = 2.

Or $U_n \geq 2$, donc lim$U_n \geq 2$ d'où L = 2.

<u>Exercice 4</u>

U suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison q = $\frac{1}{2}$.

V suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison r = $\frac{\pi}{2}$.

$|z_n| = U_n$ et arg$z_n = V_n$.

1. a) U_n et V_n en fonction de n ?

$U_n = U_0 q^n = 4(\frac{1}{2})^n$. $V_n = V_0 + nr = \frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2})n$.

b) z_n en fonction de n ?

$z_n = U_n e^{iV_n}$. Donc $z_n = 4(\frac{1}{2})^n e^{i[\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{2}\right)n]}$.

2. (z_n) suite géométrique?

$$z_{n+1} = U_{n+1} e^{iV_{n+1}} = \frac{1}{2} U_n . e^{i(V_n + \frac{\pi}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2})} . U_n e^{iV_n} = \frac{1}{2} \, \mathrm{i} \, z_n \; .$$

D'où (z_n) est une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{2}$ et de premier terme $z_0 = U_0 e^{iV_0} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

3. $\boldsymbol{Z_n = z_0 z_1 \dots z_n}$; arg $\boldsymbol{Z_n}$ en function de n?

arg Z_n = arg$(\boldsymbol{z_0 z_1 \dots z_n})$ **=** arg z_0 + arg z_1 + …+ arg z_n

$= V_0 + V_1 + \dots + V_n$ = (n+1)$(\frac{V_0 + V_n}{2})$

$= \frac{\pi}{4}(n+1)^2$.

Chapitre 6 : PRIMITIVES – CALCUL INTEGRAL EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice1

Primitive F de f dans les cas suivants ?

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$; $F(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$.

2) $f(x) = sinx\cos^3 x$; f ressemble à la forme $u'u^n$ où $u(x) = cosx$. Or $u'(x) = -sinx$ donc $f(x) = -(-sinx\cos^3 x)$, d'où $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x$.

3) $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$; $f(x)$ est de la forme $sin(ax+b)$, *donc* $F(t) = \frac{-1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$.

4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^3} = x^{\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{x^3}$; on a la forme x^r *et* $\frac{1}{x^n}$, donc

$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 2(\frac{-1}{2x^2}) = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + \frac{1}{x^2}$.

5. $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x-2}$; f ressemble à la forme $\frac{u'}{u}$ où $u(x) = x^2 + x - 2$.

Or $u'(x) = 2x + 1$ donc $f(x) = 2(\frac{2x+1}{x^2+x-2})$, d'où

$F(x) = 2ln|x^2 + x - 2|$.

6. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{(x+1)^2} = 2 + 3(\frac{1}{x-1}) - 4[\frac{1}{(x+1)^2}]$;

$\frac{1}{x-1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ et $\frac{1}{(x+1)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^n}$, donc

$F(x) = 2x + 3ln|x-1| + \frac{4}{x+1}$.

7. $f(x) = \frac{lnx}{x} = \frac{1}{x}(lnx)$; on a la forme $u'u^r$ donc

$F(x) = \frac{1}{2}(lnx)^2$.

8. $f(x) = e^{-3x+1}$; on a la forme e^{ax+b} donc

$F(x) = \frac{1}{-3}e^{-3x+1} = \frac{-1}{3}e^{-3x+1}$.

9. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}$; *f* ressemble à la forme $u'e^u$ où $u(x) = \frac{1}{x}$.

Or $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)$ d'où $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$.

10. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x\ln x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$; on a la forme $\frac{u'}{u}$, donc

$F(x) = \ln|\ln x|$.

Exercice 2

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}}$; *f* ressemble à la forme $\frac{u'}{u^n}$ où $u(x) = x^2 + 1$.

Or $u'(x) = 2x$ donc $f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]$, d'où l'ensemble des

Primitives de *f* est $F_k(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(2-1)(x^2+1)^{2-1}}\right) + k = \frac{-1}{2(x^2+1)} + k$.

Or $F_k(1) = 0$ donc $\frac{-1}{2(1^2+1)} + k = 0$; d'où $k = \frac{1}{4}$ et

$F(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4}$.

2. $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}}$

a) $g(x)$ existe ssi $4x + 8 > 0$, donc $D_g =]-2\,;+\infty[$. g est le quotient de fonctions continues sur $]-2\,;+\infty[$; $\sqrt{4x+8} \neq 0$ sur cet intervalle, donc g est continue sur $]-2\,;+\infty[$ et par conséquent elle admet des primitives sur cet intervalle.

b) g ressemble à la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ où $u(x) = 4x+1$. Or $u'(x) = 4$, donc

$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{4x+8}}\right)$ d'où l'ensemble des primitives de *f* est

$F_k(x) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{4x+8}\right) + k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x+8}\right) + k$.

De plus $F_k(2) = 4$ donc $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4(2)+8}\right) + k = 4$; d'où $k = 2$ et

$F(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x+8}\right) + 2$.

3. $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{x}}$

a) h étant une fonction rationnelle, h est continue sur son ensemble de définition D_h = $]-\infty; 0[U]0; +\infty[$. Par conséquent h admet des primitives sur $]-\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$. (mais pas sur D_h qui n'est pas un intervalle).

b) Soit H_k l'ensemble des primitives de h ; on a $H_k(x) = ln|x| + k$ *où* k est un nombre réel.

- Si I = $]-\infty; 0[$, alors $H_k(x) = ln(-x) + k$
- Si I = $]0; +\infty[$, alors $H_k(x) = lnx + k$

<u>Exercice 3</u>

Calcul d'intégrales ?

Soit f la fonction à intégrer ; déterminons F, une primitive de f en procédant de la même manière que les exercices précédents.

1) $\boldsymbol{I = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt}$; Soit $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, déterminons F.

$f(t) = \frac{1}{2}(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}})$, donc $F(t) = \sqrt{1+t^2}$; d'où

I = $F(1) - F(0) = \sqrt{2} - 1$.

2) $\boldsymbol{I = \int_2^1 3xe^{x^2-1}\, dx}$; Soit $f(x) = 3xe^{x^2-1} = \frac{3}{2}(2xe^{x^2-1})$, donc $F(x) = \frac{3}{2}(e^{x^2-1})$; d'où I = $F(1) - F(2) = \frac{3}{2}(1 - e^3)$.

3) $\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx sin^2 x\, dx}$; Soit $f(x) = cosx\, sin^2 x$; on a $F(x) = \frac{1}{3}sin^3 x$ d'où I = $F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{1}{3}$.

4) $\boldsymbol{I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} tanu\, du}$; Soit $f(u) = tanu = \frac{sinu}{cosu}$; on a $f(u) = -\frac{-sinu}{cosu}$, d'où $F(u) = -ln|cosu|$ et I = $F(0) - F(\frac{\pi}{4}) = ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

5) $\boldsymbol{I = \int_{-1}^{2} |1-x|\, dx}$; Soit $f(x) = |1-x| = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x \leq 1 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

En utilisant la relation de Chasles on a

I = $\int_{-1}^{1} |1-x|\,dx + \int_{1}^{2} |1-x|\,dx$

$= \int_{-1}^{1}(1-x)\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx$

$= [x - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{1}$ + $[\frac{1}{2}x^2 - x]_1^2 = \frac{5}{2}$.

Exercice 4

Calcul à l'aide d'intégration(s) par parties ?

1. a) I = $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosx\,dx}$; Soit $u(x) = x$ et $v'(x) = cosx$.

on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = sinx$, d'où

I = $[u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx$

$= [xsinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\,dx = [xsinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $[-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2}$ - 1.

b) I = $\boldsymbol{\int_1^3 \frac{lnx}{x^2}\,dx}$; Soit $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = lnx$.

On a u(x) $= \frac{-1}{x}$ et v'(x) $= \frac{1}{x}$, donc

I = $[u(x)v(x)]_1^3$ - $\int_1^3 u(x)v'(x)dx$.

D'où I = $[\frac{-1}{x}lnx]_1^3$ - $\int_1^3 \frac{-1}{x^2}\,dx = [\frac{-1}{x}lnx]_1^3 - [\ \frac{1}{x}\ ]_1^3$

$= \frac{2-ln3}{3}$.

c) I = $\boldsymbol{\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx}$; Soit $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{2x}$.

On a $u'(x) = 2x$ et v(x) $= \frac{1}{2}\,e^{2x}$;

d'où I = $[\frac{1}{2}x^2e^{2x}]_0^1$ - $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$.

Soit J = $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$; posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2x}$.

On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{2}\,e^{2x}$, d'où

J = $[\frac{1}{2}xe^{2x}]_0^1$ - $\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx = [\frac{1}{2}xe^{2x}]_0^1$ - $\frac{1}{2}\,[\frac{1}{2}e^{2x}]_0^1$;

il en résulte que I = $\frac{1}{2}$ ($[x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}]_0^1$) = $\frac{e^2-1}{4}$.

d) I = $\boldsymbol{\int_0^\pi e^x sinx}$**dx** ; Soit *u(x)* = *sinx* et *v'(x)* = e^x.

On a *u'(x)* = *cosx* et $v(x) = e^x$, d'où

I = $[e^x sinx]_0^\pi$ - $\int_0^\pi e^x cosx\, dx$;

Soit J = $\int_0^\pi e^x cosx\, dx$; posons *u(x)* = *cosx* et *v'(x)* = e^x.

On a *u'(x)* = - *sinx* et $v(x) = e^x$, d'où

J = $[e^x cosx]_0^\pi$ - $\int_0^\pi - e^x sinx\, dx$ = $[e^x cosx]_0^\pi$ + I.

Il en résulte que I = $[e^x sinx]_0^\pi$ - $[e^x cosx]_0^\pi$ – I ;

d'où I = $\frac{[e^x(sinx-cosx)]_0^\pi}{2}$ = $\frac{e^\pi+1}{2}$.

2. Primitives de *f* dans les cas suivants:

a) *f(x)* = *lnx* sur [1 ; + ∞[.

f est continue sur]0 ; +∞[, en particulier sur [1 ; + ∞[et donc *f* admet des primitives *F*, définies sur [1 ; + ∞[par

F(x) = $\int_a^x f(t)dt$, a ∈ [1 ; + ∞[.

Calculons *F(x)* = $\int_a^x lntdt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Soit *u(t)* = *lnt* et *v'(t)* = 1, on a

u'(t) = $\frac{1}{t}$ et $v(t) = t$, d'où *F(x)* = $[tlnt]_a^x$ - $\int_a^x 1\, dt$ = $[tlnt]_a^x$ - $[t]_a^x$ .Donc *F(x)* = *xlnx* –*x* + *alna* – *a* = *xlnx* - *x* + *k* où k est une constante.

b) *f(x)* = *(x+1)* $\boldsymbol{e^{-x}}$ sur ℝ.

f étant le produit de fonctions continues sur ℝ, *f* est continue sur ℝ et admet par conséquent des primitives *F*, définies sur ℝ par

F(x) = $\int_a^x (t+1)e^{-t}\, dt$, a ϵ ℝ .

Calculons *F(x)* à l'aide d'une intégration par parties ;

soit *u(t)* = *t* + 1 et *v'(t)* = e^{-t} . On a *u'(t)* = 1 et $v(t)$ = - e^{-t} ;

donc *F(x)* = $[-(t+1)e^{-t}]_a^x$ + $\int_a^x e^{-t}\, dt$

$= [-(t+1)e^{-t}]_a^x - [e^{-t}]_a^x = e^{-x}$ *(- x- 2)* + k où k est une constante.

Exercice 5

f(x) = cosx

1. Aire du domaine D ?

La fonction cosinus étant positive sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ et négative sur $[\frac{\pi}{2};\,\frac{3\pi}{4}]$, l'aire de ce domaine est

$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx + (-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} cosx\,dx$).

D'où $\mathcal{A} = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $[sinx]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$ = $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

En cm^2, $\mathcal{A}$ = $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$ x 2 x 3 cm^2 = 12 - 3$\sqrt{2}\,cm^2$.

2. Encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx$?

g(x) = $\frac{1}{cosx}$

On a $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; la fonction cosinus étant décroissante sur $[0\,;\,\frac{\pi}{4}]$, on a $\cos\frac{\pi}{4} \leq cosx \leq cos0$ ssi $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq cosx \leq 1$

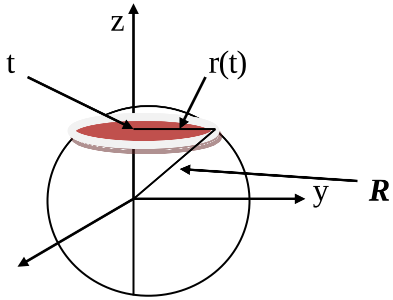
ssi $1 \leq \frac{1}{cosx} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$, d'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1.\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cosx} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}dx$.

Il en résulte que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cosx} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

d'où $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6

1. Volume V d'une boule de rayon R ?



Prenons comme origine du repère le centre O de la boule ; le plan d'équation z = t (t ∈ [-R ; R]) coupe la boule suivant un disque (D). Soit r(t) son rayon ; l'aire de (D) est S(t) = $\pi[r(t)]^2$.

D'après Pythagore, on a $r^2(t) + t^2 = R^2$, d'où

S(t) = $\pi(R^2 - t^2)$ et V = $\int_{-R}^{R} S(t)dt = \pi[R^2t - \frac{t^3}{3}]_{-R}^{R}$

$$= \frac{4\pi R^3}{3} .$$

2. (C) : $y = \sqrt{x}$ où $1 \leq x \leq 4$. Volume de la figure obtenue en faisant tourner (C) autour de l'axe (x'x)?

Soit V ce volume ;

V = $\int_1^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx$

$= \pi[\ \frac{x^2}{2}\ ]_1^4 = \frac{15\pi}{2}$.

Exercice 7

Résolvons :

1. a) 2y’- 3y = 0 ; Les solutions de cette équation sont les fonctions $f_k(x)$ = k $e^{\frac{3}{2}x}$.

b) y’ = $\frac{-1}{3}y$ ssi y’+ $\frac{1}{3}y$ = 0 ; d’où les solutions de cette équation sont les fonctions f_k définies par $f_k(x)$ = k $e^{\frac{-1}{3}x}$.

c) y’’+ y’- 6y = 0 (1) ;

Résolvons l’équation caractéristique de (1), r^2 + r – 6 = 0 :

r_1 = 2 est une racine évidente ; $2r_2 = \frac{-6}{1}$ ssi r_2 = - 3.

L’équation caractéristique admettant 2 racines distinctes, les solutions de l’équation différentielle (1) sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$, définies par $f_{\alpha;\beta}(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-3x}$ où α et β sont des réels.

2. a) y’+ 2y = 0, y(-1) = 2 ?

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f_k, définies par $f_k(x)$ = k e^{-2x} ;

or $f_k(-1)$ = 2 donc k $e^{-2(-1)}$ = 2 ssi k = $2e^{-2}$;

d’où la solution vérifiant la condition posée est la fonction f définie par f(x) = $2e^{-2}$. e^{-2x} = $2e^{-2x-2}$.

b) y’’+ 4y’+ 4y = 0 (1) , y(0) = 1 et y’(0) = 1 ?

Résolvons l’équation caractéristique de (1), r^2 + 4r + 4 = 0 :

$\Delta = (4)^2$- 4(4)(1) = 0, donc r_0 = -2 .

L’équation caractéristique admettant une solution double, les solutions de l’équation différentielle (1) sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$, définies par $f_{\alpha;\beta}(x) = (\alpha x + \beta)e^{-2x}$.

Déterminons f la solution vérifiant les conditions posées : or $f'_{\alpha;\beta}(x) = \alpha e^{-2x} - 2(\alpha x + \beta)e^{-2x}$ et $\begin{cases} f_{\alpha;\beta}(O) = 1 \\ f'_{\alpha;\beta}(0) = 1 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$ d'où $f(x) = (3x+1)e^{-2x}$.

c) y''- 2y'+ 5y = 0 (1) , y(π) = 1 et y'(π) = 0 ?

Résolvons l'équation caractéristique de (1), r^2- 2r + 5 = 0 :

$\Delta' = (-1)^2$- (1)((5) = - 4 ; Δ' = $4i^2$ = $(2i)^2$ donc

z_1 = 1 – 2i et z_2 = 1- 2i .

L'équation caractéristique admettant 2 solutions complexes, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$ définies par $f_{\alpha;\beta}(x) = e^x(\alpha cos2x + \beta sin2x)$.

Déterminons f la solution vérifiant les conditions posées :

Or $f'_{\alpha;\beta}(x) = e^x(2x + \beta sin2x)$ + e^x $(-2\alpha sin2x + 2\beta cos2x)$ et

$\begin{cases} f_{\alpha;\beta}(\pi) = 1 \\ f'_{\alpha;\beta}(\pi) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha e^{\pi} = 1 \\ \alpha e^{\pi} + 2\beta e^{\pi} = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \alpha = e^{-\pi} \\ \beta = \frac{-1}{2} e^{-\pi} \end{cases}$;

d'où $f(x) = e^{x-\pi}(cos2x - \frac{1}{2}sin2x)$.

Exercice 8

1. *f* ? solution de y''- 2y'+ y = 0 (1), *f(0)* = 1 et *f'(0)* = 3 .

Résolvons l'équation caractéristique de (1), r^2- 2r + 1 = 0 :

r^2- 2r + 1 = 0 ssi $(r-1)^2$ = 0 ssi r = 1.

L'équation caractéristique admettant une solution double, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$ définies par

$f_{\alpha;\beta}(x) = (\alpha x + \beta)e^x$.

Déterminons f la solution vérifiant les conditions posées :

or $f'(x) = \alpha e^x$ + $(\alpha x + \beta)e^x$ et $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 3 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$. D'où $f(x) = (2x + 1)e^x$.

2. Déterminons une primitive de f ?

f étant un produit de fonctions continues sur ℝ , *f* est continue sur ℝ et par conséquent, elle admet des primitives sur ℝ, F. Déterminons les.

f est une solution de (1) donc $f''(t) - 2f'(t) + f(t) = 0$

ssi $f(t) = 2f'(t) - f''(t)$;

d'où $\int_a^x f(t)dt = 2\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x f''(t)\,dt$, a ∈ ℝ .

Il en résulte que $F(x) - F(a) = 2[f(x) - f(a)] - [f'(x) - f'(a)]$;

d'où $F(x) = 2f(x) - f'(x) + k$, k étant une constante. En remplaçant $f(x)$ et $f'(x)$ par leurs valeurs, on obtient pour k = 0, $F(x) = (2x - 1)\,e^x$.

3. Vérifions que F primitive de f ?

$F'(x) = 2e^x + (2x - 1)\,e^x = e^x(2 + 2x - 1)$

$\quad = e^x(2x + 1) = f(x)$; donc F est bien une primitive de *f*.

<u>Exercice 9</u>

(E) : *y' + y = cosx*

1. *p* et *q* ?, h solution de (E)

h solution de (E) ssi $h'(x) + h(x) = cosx$

ssi $-psinx + qcosx + pcosx + qsinx = cosx$

ssi $(q + p)cosx + (q - p)sinx = cosx$; il en résulte :

$$\begin{cases} q + p = 1 \\ q - p = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où $h(x) = \frac{1}{2}(cosx + sinx)$.

2. (E'): *y' + y = 0?*

Les solutions de (E') sont les fonctions f_k , définies par

$f_k(x) = \mathrm{k}e^{-x}$, k ∈ ℝ.

3. *g* solution de (E) ssi *g – h* solution de (E') ?

$g - h$ solution de (E') ssi $[g(x) - h(x)]' + [g(x) - h(x)] = 0$

ssi $g'(x) + g(x) = h'(x) + h(x)$

ssi $g'(x) + g(x) = cosx$ (car h solution de (E))

ssi g solution de (E).

4. Solutions de (E) ?

Soit g_k une fonction telle que $g_k(x) - h(x) = f_k(x)$.

f_k étant solution de (E') donc $g_k - h$ est solution de (E'), d'où g_k est solution de (E) d'après la question précédente ;

Or $g_k(x) - h(x) = f_k(x)$, donc $g_k(x) = f_k(x) + h(x)$.

Il en résulte que les solutions de (E) sont les fonctions g_k définies par $g_k(x) = \mathrm{k}e^{-x} + \frac{1}{2}(cosx + sinx)$.

5. Détermination de *f* ?

La courbe de la solution de (E) passe par A(0 ; 1) ssi $g_k(0) = 1$

ssi $\mathrm{k}e^{0} + \frac{1}{2}(cos0 + sin0) = 1$ ssi $\mathrm{k} = \frac{1}{2}$.

d'où $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}(cosx + sinx)$.

Chapitre 7 : DENOMBREMENT – PROBABILITE

Exercice 1

Soit A, B, C,…, I, J ces 10 délégués.

1. Comme bureaux possibles on a ABC, DAF, …

- Répétons un élément pour voir si un bureau est une p-liste :

Le bureau AAB n'est pas possible car il est composé des 2 délégués A et B, au lieu de 3 comme l'exige l'énoncé.

- Changeons l'ordre des éléments pour voir si on a des arrangements ou des combinaisons :

Le bureau ABC étant le même que le bureau BAC (car les deux bureaux sont composés des mêmes délégués) donc l'ordre n'intervient pas et par conséquent un bureau est une combinaison de 3 éléments d'un ensemble à 10 éléments.

Il en résulte que le nombre de bureaux est $C_{10}^{3} = \frac{10x9x8}{3x2x1} = 120$.

2. Supposons que le président occupe la 1ere place, le trésorier la 2eme et le secrétaire la 3eme.

a) Comme bureaux possibles on a DIC, J0B, …

- Répétons un élément pour voir si un bureau est une p-liste :

Le bureau BOB n'est pas possible car le délégué B a cumulé 2 postes, contrairement à l'énoncé qui interdit le cumul.

- Changeons l'ordre des éléments pour voir si on a des arrangements ou des combinaisons :

Le bureau DAF est différent du bureau FAD car dans le 1er, D est président alors que dans le 2^{e} c'est F qui est président. Donc l'ordre est pris en compte et par conséquent un bureau est un arrangement de 3 éléments d'un ensemble à 10 éléments.

Il en résulte que le nombre de bureaux est A_{10}^{3} = 10x9x8 = 720.

b) Comme bureaux possibles on a EIB, JAF, …

- Répétons un élément pour voir si un bureau est une p-liste :

Le bureau ABB est possible car B cumule à la fois les postes de trésorier et de secrétaire. Donc un bureau est 3-liste d'un ensemble de 10 éléments.

Par conséquent le nombre de bureaux est 10^3= 1000.

Remarques :

- Ce type de raisonnement est utilisé pour savoir si on a des des p-listes, des arrangements ou des combinaisons dans le cas où on l'ignore; mais il n'est pas exigé.

- On peut retenir pour des exercices de dénombrement concernant un groupe de personnes faisant partie d'une entité plus large (bureaux, comité, …) que :

- si les postes ou places ne sont pas précisés, on a des combinaisons.

- si les postes ou places sont précisés et s'il n'y a pas cumul, on a des arrangements.

- si les postes ou places sont précisés et s'il y a cumul, on a des p-listes.

Exercice 2

1. Un podium est constitué d'un groupe de 3 athlètes ; les places étant précisées (1^{er}, 2^{e} et 3^{e}) et du fait qu'il n' y a pas cumul (un athlète ne peut pas occuper 2 places), un podium est un arrangement de 3 éléments d'un ensemble à 8 éléments ;

par conséquent le nombre de podiums est A_8^3 = 8x7x6 = 336.

2. a) Bolt est 1^{er} donc on choisit pour la 1ere place Bolt (A_1^1), puis (principe multiplicatif) 2 athlètes parmi 7 pour les places restantes (A_7^2)

Il en résulte que le nombre de podiums est

A_1^1 x A_7^2 = 1x7x6 = 42.

b) Bolt est dans le podium, donc il est 1[er] ou 2[e] ou 3[e]. Donc avant le choix de Bolt, on lui choisit 1 place parmi 3, (C_3^1 possibilités) ensuite on choisit Bolt (A_1^1), puis 2 athlètes parmi 7 (A_7^2). Il en résulte que le nombre de podiums est

C_3^1 x A_1^1 x A_7^2 = 3x1x7x6 = 126.

Remarque :

Si on doit choisir p éléments et que ces p éléments peuvent occuper p places parmi n, avant le choix des p éléments, on leur choisit p places parmi n (C_n^p possibilités).

Exercice 3

Un jeu de 32 cartes est composé de :

- 8 trèfles (7 ; 8 ; 9 ; 10 ; as ; roi ; dame ; valet)
- 8 piques (7 ; 8 ; 9 ; 10 ; as ; roi ; dame ; valet)
- 8 cœurs (7 ; 8 ; 9 ; 10 ; as ; roi ; dame ; valet)
- 8 carreaux (7 ; 8 ; 9 ; 10 ; as ; roi ; dame ; valet)

Une « main » de 5 cartes est une combinaison de 5 éléments.

1. Pour une « main » de 5 cartes comportant 2 valets, on choisit 2 valets parmi 4 (C_4^2), puis (principe multiplicatif) on complète la main avec 3 cartes, qui ne sont pas des valets, parmi 28 (C_{28}^3).

D'où le nombre de « mains » est

C_4^2 x $C_{28}^3 = \frac{4.3}{2.1}$ x $\frac{28x27x26}{3x2x1}$ =19656.

En utilisant le même raisonnement, on obtient pour les autres questions :

2. C_8^3 x $C_{24}^2 = \frac{8x7x6}{3x2x1}$ x $\frac{28x27}{2x1}$ = 15456 .

3. Une « main » comportant plus de 2 dames (> 2) est une « main » comportant 3 dames ou bien (principe additif)

4 dames ;

d'où le nombre de « mains » est C_4^3 x C_{28}^2 + C_4^4 x C_{28}^1 = 1540.

4. Une « main » comportant au moins un roi (≥ 1) contient soit 1 roi ou 2 rois ou 3 rois ou 4 rois. (principe additif).

D'où le nombre de « mains » est :

C_4^1 x C_{28}^4 + C_4^2 x C_{28}^3 + C_4^3 x C_{28}^2 + C_4^4 x C_{28}^1 = 103096.

<u>Autre méthode</u>

Soit A = « au moins un roi », on a $\bar{A}$ = « pas de roi ».

Or cardA = cardΩ - card$\bar{A}$, donc cardA = C_{32}^5 - C_{28}^5 = 103096.

<u>Exercice 4</u>

Une urne contient 5BR, 3BB et 2BN.

A. Tirage simultané de 3 boules (on a des combinaisons)

1. C_{10}^3 = 120.

2. a) C_5^3 = 10.

b) 0 (car c'est impossible et cardϕ = 0).

c) C_3^2 x C_2^1 = 6.

d) « 2BB » : on tire 2BB, puis on complète par une boule non blanche pour avoir 3boules.

Donc le nombre de tirages est C_3^2 x C_7^1 = 21.

e) A = « Au moins 1BB » ; on a $\bar{A}$ = « pas de BB »

Or cardA = cardΩ - card$\bar{A}$, donc cardA = C_{10}^3 - C_7^3 = 85.

f) «des boules de même couleur » : on aura 3BR ou 3BB ou 3BN ; donc le nombre de tirages est :

C_5^3 + C_3^3 + 0 = 10 + 1 + 0 = 11.

g) « des boules tricolores » = « 1BR, 1BB et 1BN » ; donc le nombre de tirages est : C_5^1 x C_3^1 x C_2^1 = 30.

B. Tirage successivement de 3 boules (on a des arrangements)

1. A_{10}^3 = 10 x 9 x 8 = 720.

2. a) A_5^3 = 60.   b) 0.   c) A_3^2 x A_2^1 = 12.

d) 2BB et 1BN ?

Les 2BB peuvent occuper les 2 premières places ou les 2 dernières ou la 1ere et la 3^e place ; donc avant le choix des 2BB, on leur choisit 2 places parmi 3 (C_3^2 choix).

Par conséquent le nombre de tirages est : C_3^2 x A_3^2 x A_2^1 = 36.

e) « 2BB » = « 2BB et 1boule non blanche ». Donc comme pour la question précédente on aura le choix de places.

Par conséquent le nombre de tirages est : C_3^2 x A_3^2 x A_7^1 = 126.

f) « au moins 1BB » signifie qu'on a 1BB ou 2BB ou 3BB. Donc le nombre de tirages est :

C_3^1 x A_3^1 x A_7^2 + C_3^2 x A_3^2 x A_7^1 + A_3^3 = 510.

<u>Autre méthode</u>

Soit A = « au moins 1BB » ; on a $\bar{A}$ = « pas de BB »

Or cardA = cardΩ - card$\bar{A}$, donc cardA = A_{10}^3 - A_7^3 = 510.

C. Tirage successif avec remise de 3 boules (on a des p-listes)

1. 10^3 = 1000.

2. a) 5^3 = 125.   b) 2^3 = 8.

c) 3^2 x 2^1 = 18.   d) C_3^2 x 3^2 x 2^1 = 54.

e) C_3^2 x 3^2 x 7^1 = 189.

f) Soit A = « au moins 1BB », on a $\bar{A}$ = « pas de BB ».

Or cardA = cardΩ - card$\bar{A}$, donc cardA = 10^3 - 7^3 = 657.

<u>Exercice 5</u>

Chaque carte ayant la même chance d'être tirée, le tirage est équiprobable ; en outre le tirage d'<u>une</u> carte peut être considéré comme des p-listes ou des arrangements ou des combinaisons.

cardΩ = 32^1 = 32.

1.   A : « tirer le roi de trèfle » ;   cardA = 1^1

donc p(A) = $\frac{cardA}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{32}$.

2. B : « tirer 1 roi » ; cardB = 4^1 donc p(B) = $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

3. C : « tirer 1 trèfle » ; cardC = 8^1 donc p(C) = $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

4. D : « 1 roi ou 1 trèfle » ; D = B∪C donc
p(D) = p(B) + p(C) – p(B∩C) ;
or B∩C = A, il en résulte: p(D) = $\frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

5. E : « ni roi, ni trèfle » ; E = $\overline{D}$ donc p(E) = 1 – p(D) = $\frac{21}{32}$.

<u>Exercice 6</u>

$U_1 : \begin{cases} 3BB \\ 2BN \end{cases}$ et $U_2 : \begin{cases} 5BB \\ 1BN \end{cases}$; cardΩ = 5^1 x 6^1 = 30.

1.a) $p_a = \frac{3x5}{5x6} = \frac{1}{2}$. b) $p_b = \frac{2x1}{5x6} = \frac{1}{15}$.

c) «1BB+1BN» la BB vient de U_1 ou de U_2 ;
d'où $p_c = \frac{3x1}{5x6} + \frac{5x2}{5x6} = \frac{13}{30}$.

2. a) A = « 2 boules de même couleur » ; on a
$\bar{A}$: «1BB et 1BN». D'où p(A) = 1 – p($\bar{A}$) = $\frac{17}{30}$.

b) Obtenir 3 fois A au cours des 5 lancers, c'est obtenir 3 fois A et 2 fois $\bar{A}$. On peut obtenir A lors des 3 premiers lancers ou lors des 3 derniers ou …etc ; c'est-à-dire obtenir AAA$\bar{A}\bar{A}$ ou $\bar{A}\bar{A}$AAA ou A$\bar{A}$A$\bar{A}$A, … ; donc le choix de places s'impose.
D'où la probabilité d'obtenir 3 fois A lors des 5 lancers est
C_5^3 x$(\frac{17}{30})^3$ x $(1 - \frac{17}{30})^2 \cong 0{,}34$.

c) B : « obtenir au moins A lors des n lancers » ; on a
$\bar{B}$ = « ne pas obtenir A lors des n lancers »
= « obtenir $\bar{A}$ lors des n lancers » ;

Or $p(\bar{B}) = [p(\bar{A})]^n = (\frac{13}{30})^n$ et $p_n = p(B) = 1 - p(\bar{B})$,

Donc $p_n = 1 - (\frac{13}{30})^n$.

d) n ?, $p_n \geq 0{,}999$.

$p_n \geq 0{,}999$ ssi $1 - (\frac{13}{30})^n \geq 0{,}999$ ssi $(\frac{13}{30})^n \leq 0{,}001$.

$\ln(\frac{13}{30})^n \leq \ln(0{,}001)$ ssi $n\ln(\frac{13}{30}) \leq \ln(0{,}001)$ ssi $n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(\frac{13}{30})}$

(car $\ln(\frac{13}{30}) < 0$) ssi $n \geq 8,26$; d'où n = 9.

Exercice 7

1. Exprimons toutes les probabilités en fonction de P_1.

$P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_6 = 2P_3 = 6P_1$; $P_5 = 2P_6 = 12P_1$.

Or $\sum P_i = 1$ donc $25P_1 = 1$ d'où $P_1 = \frac{1}{25}$.

On en déduit que $P_2 = \frac{1}{25}$; $P_3 = \frac{3}{25}$; $P_4 = \frac{2}{25}$; $P_5 = \frac{12}{25}$; $P_6 = \frac{6}{25}$.

2. On obtient un numéro pair, si on a 2 ou 4 ou 6 ;
donc la probabilité d'obtenir un numéro pair est :

$P_2 + P_4 + P_6 = \frac{9}{25}$.

3. De la même manière que la question 2.b) de l'exercice 6, la probabilité d'obtenir 4 fois un numéro pair lors des 5 lancers est :

C_5^4 x$(\frac{9}{25})^4$ x $(1 - \frac{9}{25})^1 \cong 0,05$.

Exercice 8

	Matheux	Non matheux
Garçons	3	15
Filles	2	10

Soit M : « être un matheux » et G : « être un garçon ».
On lit le tableau pour donner les résultats suivants.
On a 30 élèves et le nombre de choix possibles d'un élève est $\text{card}\Omega = 30^1$.

1. a) p(M) = ?

On a 3 + 2 = 5 matheux donc $p(M) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

b) p(G) = ?

On a 3 + 15 = 18 garçons donc $p(G) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

c) p(M∩G) = ?

On a 3 élèves qui sont à la fois « matheux » et « garçon », donc $p(M\cap G) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

d) p(M/G) = ?

Sachant que l'élève est un garçon, le nombre de cas possibles est 18 et le nombre de cas favorables à l'obtention d'un « matheux » est 3.

D'où $p(M/G) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

2. M et G indépendants ?

p(M / G) = p(M) donc les événements M et G sont indépendants.

<u>Autre méthode</u>

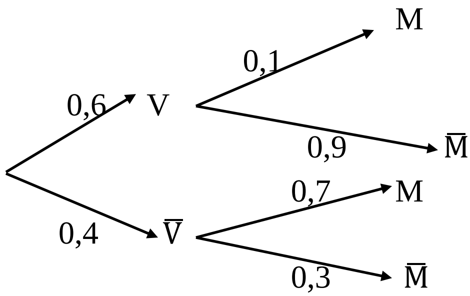
$p(M)p(G) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{10}$

$= p(M\cap G)$; d'où M et G indépendants.

<u>Exercice 9</u>

Les probabilités de certains événements étant données dans l'énoncé, on peut définir avec des lettres ces événements et utiliser un arbre de choix, pour trouver les probabilités qu'on peut en déduire.

Soit V : « être vacciné » et M : « être malade ».



p(V) = 0,6. p($\overline{\text{V}}$) = 0,4. p(M / V) = 0,1.

p($\overline{\text{M}}$ / V) = 0,9. p(M / $\overline{\text{V}}$) = 0,7. p($\overline{\text{M}}$ / $\overline{\text{V}}$) = 0,3.

1. **a)** p(M / V) = 0,1.

b) p(M∩V) = p(V)p(M / V)

= (0,6)(0,1) = 0,06.

c) D'après le Théorème des probabilités totales

p(M) = p(V).p(M / V) + p($\overline{\text{V}}$).p(M / $\overline{\text{V}}$)

= (0,6)(0,1) + (0,4)(O,7) = 0,34.

2. L'individu est bien portant, donc non malade ; la probabilité qu'il soit vacciné est p(V/ $\overline{\text{M}}$) = $\frac{p(V\cap\overline{\text{M}})}{p(\overline{\text{M}})} = \frac{p(V)p(\overline{M}/V)}{p(\overline{\text{M}})}$;

d'où p(V/$\overline{\text{M}}$) = $\frac{(0,6)(0,9)}{1-0,34} \cong$ 0,81.

<u>Exercice 10</u>

$U_1\begin{cases}4BB\\1BN\end{cases}$; $U_2\begin{cases}2BB\\3BN\end{cases}$.

Soit N : « tirer 1BN » et U_1: « U_1est choisie ».

1. $p(N/U_1) = \frac{1^1}{5^1} = \frac{1}{5}$.

2. $p(N/\overline{U_1}) = \frac{3^1}{5^1} = \frac{3}{5}$.

3. $p(N) = p(U_1)p(N/U_1) + p(\overline{U_1})p(N/\overline{U_1})$

$= (\frac{1}{2})\left(\frac{1}{5}\right) + (\frac{1}{2})(\frac{3}{5}) = \frac{2}{5}$.

<u>Exercice 11</u>

Dé 2 / **Dé** 1	**1**	**2**	**3**	**4**
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

1. a) Déterminons la loi de probabilité de X

X étant la somme des numéros, x_i les différentes valeurs prises par X sont 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8. (les valeurs obtenues dans le tableau ci- dessus qui donne la somme des numéros des 2 dés).

x le numéro qui apparait sur le dé 1 et y celui qui apparait sur le dé 2 forment le couple (x ; y) à qui on associe la somme x + y.

- Obtenir une somme égale à 2 correspond à l'événement (X =2) qu'on obtient avec le couple de numéros (1 ; 1).
- Obtenir une somme égale à 3, correspond à l'événement (X = 3) qu'on obtient avec les couples (1 ; 2) et (2 ; 1)
- etc.

La probabilité d'obtenir un couple de numéro étant $\frac{1}{4}\text{x}\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$,

$p\{(X = 2)\} = \frac{1}{16}$. $p\{(X = 3)\} = 2 \text{ x } \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$.

$p\{(X = 4)\} = 3 \text{ x } \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. $p\{(X = 5)\} = 4 \text{ x } \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$.

$p\{(X = 6)\} = 3 \text{ x } \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. $p\{(X = 7)\} = 2 \text{ x } \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$.

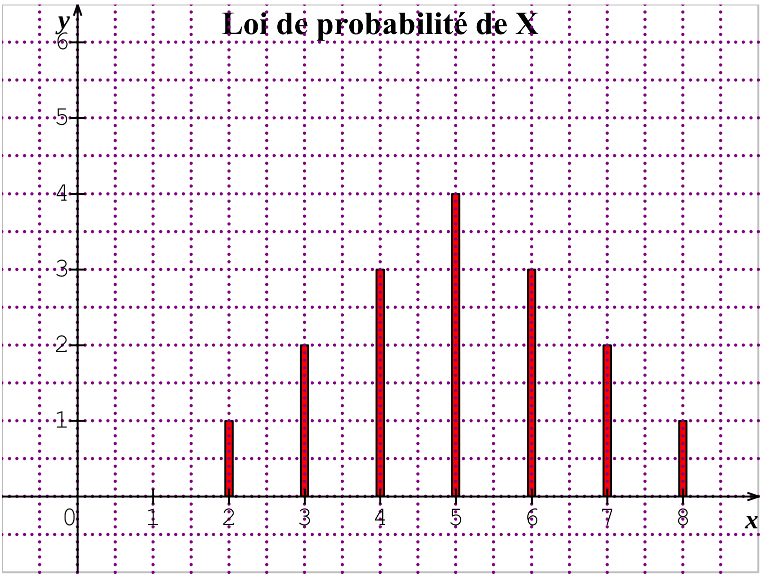
$p\{(X = 8)\} = \frac{1}{16}$.

On obtient ainsi la loi de probabilité définie ci-dessous.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

on remarque que $\sum p_i = 1$.

b) Représentation graphique



On représente la loi de probabilité à l'aide d'un diagramme en batons.

<u>Echelle</u> : 1unité correspond à $\frac{1}{16}$ sur l'axe des ordonnées.

2. a) Définissons la fonction de répartition F, F(x) = p(X≤ x)

- Si $x \in]-\infty; 2[$, alors F(x) = 0.
- Si $x \in [2; 3[$, alors $F(x) = p_2 = \frac{1}{16}$.
- Si $x \in [3; 4[$, alors $F(x) = p_2 + p_3 = \frac{3}{16}$.

- Si x ∈ [4; 5[, alors $F(x) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{6}{16}$.

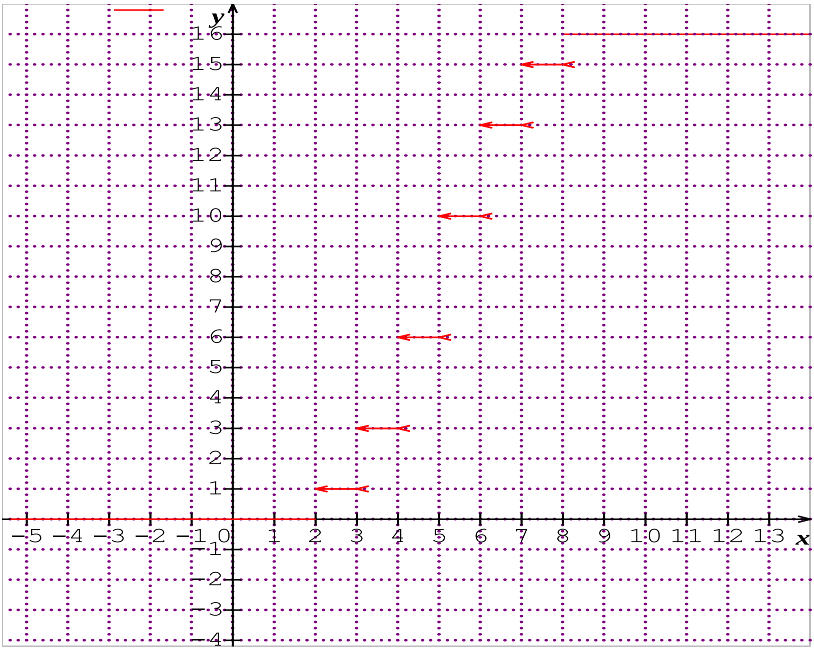
- Si x ∈ [5; 6[, alors $F(x) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{10}{16}$.

- Si x ∈ [6; 7[, alors $F(x) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{13}{16}$.

- Si x ∈ [7; 8[, alors $F(x) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = \frac{15}{16}$.

- Si x ∈ [8; +∞[, alors $F(x) = p_2 + p_3 + \cdots + p_8 = 1$.

b) Représentons F la fonction de répartition ?



<u>Echelle</u> : 1 unité correspond à $\frac{1}{16}$ sur l'axe des ordonnées.

La représentation graphique de la fonction de répartition F est une fonction en escalier.

3. Calcul de E(X), V(X) et σ(X) ?

Pour ces calculs, on peut compléter le tableau définissant la loi de probabilité de cette manière :

x_i^2	4	9	16	25	36	49	64	
x_i	2	3	4	5	6	7	8	
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	Somme
$x_i.p_i$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{8}{16}$	5
$x_i^2.p_i$	$\frac{4}{16}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{48}{16}$	$\frac{100}{16}$	$\frac{108}{16}$	$\frac{98}{16}$	$\frac{64}{16}$	27,5

- E(X) = $\sum x_i.p_i$ = 5.
- V(X) = $\sum x_i^2.p_i - [E(X)]^2$ = 27, 5 – 25 ; d'où V(X) = 2,5
- σ(X) = $\sqrt{V(X)} \cong$ 1,58.

Remarque

On peut aussi pour ces calculs, écrire les formules et ensuite utiliser une calculatrice pour avoir les résultats.

Exercice 12

U $\begin{cases} 5JB \\ 3\ JR \end{cases}$; Tirage simultané de 5 jetons

1. Loi de probabilité de Y ?

Le joueur peut tirer 5JB ou (4JB et 1JR) ou (3JB et 2JR) ou (2JB et 3JR).

- S'il tire 5JB, il aura un gain algébrique de – 5n.
- S'il tire 4JB et 1JR, il aura un gain algébrique de100 – 4n.
- S'il tire 3JB et 2JR, il aura un gain algébrique de 200 – 3n.
- S'il tire 2JB et 3JR, il aura un gain algébrique de 300 – 2n.

Par conséquent les valeurs y_i prises par la variable aléatoire Y sont : - 5n ; 100 – 4n ; 200 – 3n ; 300 – 2n. D'où

p(Y = - 5n) = $\frac{C_5^5}{C_8^5} = \frac{1}{56}$.   p(Y = 100 - 4n) = $\frac{C_5^4 x C_3^1}{C_8^5} = \frac{15}{56}$.

p(Y = 200 - 3n) = $\frac{C_5^3 x C_3^2}{C_8^5} = \frac{30}{56}$.   p(Y = 300 - 2n) = $\frac{C_5^2 x C_3^3}{C_8^5} = \frac{10}{56}$.

On obtient ainsi la loi de probabilité de Y, présentée dans le tableau suivant :

y_i	-5n	100 - 4n	200-3n	300-2n
p_i = p(Y = y_i)	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

On remarque que $\sum p_i = 1$.

2. E(Y) = $\sum y_i . p_i = \frac{-5n}{56} + \frac{1500-60n}{56} + \frac{6000-90n}{56} + \frac{3000-20n}{56}$

$= \frac{10500-175n}{56}$.

3. Le jeu est équitable ssi E(Y) = 0 ssi 10500 – 175n = 0

ssi n = 60.

Exercice 13

1. Pour chaque question, la probabilité d'obtenir une réponse correcte est $\frac{1}{4}$ et celle d'obtenir une réponse incorrecte est $\frac{3}{4}$.

a) Le candidat trouve la première question signifie qu'il obtient une réponse correcte pour la première question et des réponses fausses pour les 9 autres questions. Par conséquent la probabilité de trouver la 1ere question est : $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^9 \cong 0{,}018$.

b) Le candidat obtienne une réponse correcte ; la réponse correcte peut être obtenue à la 1ere question ou à la 2eme ou …etc. Donc le choix de places se pose, d'où la probabilité d'obtenir 1 réponse correcte est

$C_{10}^1(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^9 \cong 0{,}18$.

2. a) X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$, donc la probabilité d'obtenir k réponses correctes en répondant aux 10 questions est $p(X = k) = C_{10}^k (\frac{1}{4})^k (\frac{3}{4})^{10-k}$.

b) * $p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = (\frac{3}{4})^{10} + C_{10}^1(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^9$

$\cong 0{,}23$.

$*$ P(X $\geq$ 2) = ?

$(\overline{X \leq 1})$ = (X > 1) = (X $\geq$ 2);

d'où p{(X $\geq$ 2)} = p{$(\overline{X \leq 1})$}= 1 – p{(X $\leq$ 1)}

$\cong$ 0,77.

3. X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$ donc

E(X) = 10($\frac{1}{4}$) = 2,5.

E(X) = 2,5 signifie qu'un candidat qui répond au hasard à ce QCM, obtient en moyenne 2,5 réponses correctes sur 10.

Par conséquent on a pas intérêt à répondre au hasard à ce QCM.

Chapitre 8 : SERIE STATISTIQUE DOUBLE

Exercice 1

1. Nuage de points ?

2. Calcul de r ?

r = $\frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$. Donc pour calculer le coefficient de corrélation r on commence par le calcul des moyennes de x et y, leur variance, leur écart-type et la covariance de x et y.

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = 3$. $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum y_i = 35{,}64$. $V(x) = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - \bar{x}^2 = 2$.

$V(y) = \frac{1}{N}\sum y_i^2 - \bar{y}^2 \cong 24{,}39$. $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \cong 1{,}41$.

$\sigma(y) = \sqrt{V(y)} \cong 4{,}93$. $cov(x\ ;\ y) = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \bar{x}.\bar{y} \cong 6{,}32$.

d'où r ≅ 0,90 ; | r | proche de 1, donc on a une bonne corrélation.

3. Droite de régression de y en x ?

x	$\bar{x}$	0
y	$\bar{y}$	26,16

$d_{y/x}$: y - $\bar{y}$ = a (x - $\bar{x}$) où

a = $\frac{cov(x\ ;\ y)}{V(x)} \cong 3{,}16$.

D'où $d_{y/x}$: y = 3,16x + 26, 16.

$d_{y/x}$ passe par G($\bar{x}$; $\bar{y}$), pour la tracer il suffit de déterminer un autre point de la droite de régression de y de x .

Pour x = 0 on a y = 26,16 ; d'où $d_{y/x}$ est la droite passant par les points G et A(0 ; 26,16), représentée sur la figure.

4. Taux de réussite en 2014 ?

En 2014 le rang de l'année x = 2014 – 2006 + 1 = 9.

Pour x = 9, le taux de réussite y = (3,16)(9) + 26,16 = 54,6.

Donc le taux de réussite au Bac de ce Lycée est estimé à 54,6 % en 2014.

<u>Exercice 2</u>

y \ x	16	18	20	22	26	Totaux
2,6	0	0	0	0	1	1= $n_{1.}$
2,8	1	1	0	3	0	5= $n_{2.}$
3	0	2	0	2	2	6= $n_{3.}$
3,2	0	0	3	1	0	4= $n_{4.}$
3,4	0	2	0	0	0	2= $n_{5.}$
3,6	0	0	1	0	1	2= $n_{6.}$
Totaux	1= $n_{.1}$	5= $n_{.2}$	4= $n_{.3}$	6= $n_{.4}$	4= $n_{.5}$	20= N

1. Séries marginales ?

La première série marginale est $\{(y_i, n_{i\,.})\}_{1 \le i \le 6}$ définie par :

y_i	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6
$n_{i\,.}$	1	5	6	4	2	2

La deuxième série marginale est $\{(x_j, n_{.j})\}_{1 \le j \le 5}$ définie par :

x_j	16	18	20	22	26
$n_{.j}$	1	5	4	6	4

2. $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ(x) et σ(y) ?

- $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{5} n_{.j}x_j$; donc $\bar{x} = \frac{1}{20}$ (1x16 + … + 4x26) = 21,1
- $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_{i\,.}y_i$; donc

  $\bar{y} = \frac{1}{20}$ (1x2,6 + … + 2x3,6) ≅ 3,07
- V(x) = $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{5} n_{.j}{x^2}_j - \bar{x}^2$ = 8,99 d'où

  σ(x) = $\sqrt{V(x)}$ ≅ 2,99
- V(y) = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_{i\,.}{y^2}_i - \bar{y}^2$ ≅ 0, 07 d'où

  σ(y) = $\sqrt{V(y)}$ ≅ 0,27

3. Coefficient de corrélation ?

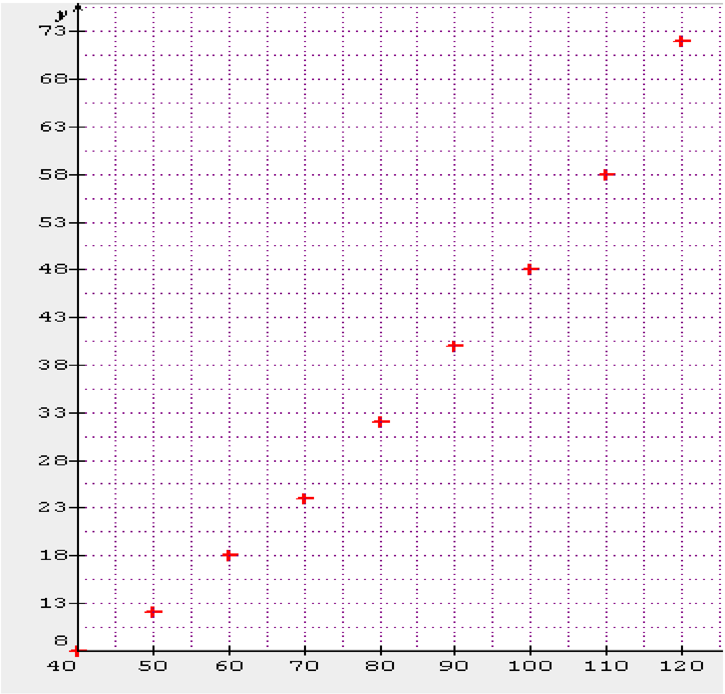
r = $\frac{cov\,(x;y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$. or cov(x ; y) = $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{6} n_{ij}y_ix_j - \bar{y}.\bar{x}$ ≅ - 0,07 d'où r ≅ - 0,09. | r | n'étant pas proche de 1, la corrélation n'est pas bonne.

<u>NB</u> : Une calculatrice scientifique donne tous les résultats sauf celui de la covariance qu'on peut obtenir en partie avec $\sum xy$.

Par conséquent la maîtrise de la calculatrice en mode statistique est un atout de taille.

<u>Exercice 3</u>

A. 1. Nuage de points ?



2. Equation de $d_{y/x}$?

$d_{y/x}$: y - $\bar{y}$ = a(x - $\bar{x}$) où a = $\frac{cov(x;y)}{V(x)}$.

Calculons $\bar{x}$, $\bar{y}$, V(x) et cov(x ; y).

$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum x_i$ = 80. $\bar{y} = \frac{1}{9}\sum y_i$ = 34,66.

V(x) = $\frac{1}{9}\sum x^2{}_i$ - $\bar{x}^2$ = 666,66.

cov(x ; y) = $\frac{1}{9}\sum x_i\, y_i$ - $\bar{x}.\bar{y}$ = 522,22.

D'où a = 0,78 et $d_{y/x}$: y = 0,78x – 28.

3. Coefficient de corrélation ?

r = $\frac{cov\,(x;y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$. or cov(x ; y) = $\frac{1}{N}\sum x_i y_i - \bar{x}\,.\,\bar{y}$ = 522,22 ;

σ(x) = $\sqrt{V(x)}$ = 25,81 ; V(y) = = $\frac{1}{9}\sum y^2{}_i$ - $\bar{y}^2$ = 418,66 et

σ(y) = $\sqrt{V(y)}$ = 20,46 donc r = 0,98.

| r | proche de 1 donc on a une bonne corrélation.

4. a) L'automobiliste roulant à 150km/h, donc $x = 150$ et par conséquent la distance de freinage de son véhicule est

y = (0,78)(150) – 28 = 89m ;

l'obstacle étant à 85m, l'automobiliste va percuter l'obstacle.

b) Vitesse maximale ?

Pour ne pas heurter l'obstacle, la distance de freinage y doit être inférieur 85m.

y < 85 ssi $0,78x - 28 < 85$ ssi $x < 144,87$;

donc la vitesse maximale au moment du freinage est 144km/h à l'unité prés.

B.

	y_1	y_2	Totaux
x_1	440	360	$n_{1\,.} = 800$
x_2	110	90	$n_{2\,.} = 200$
Totaux	$n_{.1} = 550$	$n_{.2} = 450$	N = 1000

1. Effectif total ?

L'effectif total étant égal à la somme des effectifs n_{ij},

N = 440 + 360 + 110 + 90 = 1000.

2. Fréquences conditionnelles ?

- $f_{y_2/x_1} = \frac{n_{12}}{n_{1\,.}} = \frac{360}{800}$; donc $f_{y_2/x_1} = \frac{9}{20} = 45\ \%$
- $f_{x_2/y_2} = \frac{n_{2\,2}}{n_{.2}} = \frac{90}{450}$; donc $f_{x_2/y_2} = \frac{1}{5} = 20\ \%$

3. Fréquences marginales ?

- $f_{.1} = \frac{n_{.1}}{N} = \frac{550}{1000}$; donc $f_{.1} = \frac{11}{20} = 55\ \%$
- $f_{2\,.} = \frac{n_{2\,.}}{N} = \frac{200}{1000}$; donc $f_{2\,.} = \frac{1}{5} = 20\ \%.$