EPREUVES

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques

http://www.math-fastef.org/

departement.maths.fastef@gmail.com

2011-2012

Durée : 4 heures

Test d'entrée à la section F1C1 MPC /MSVT

Nota bene *: Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation de la rigueur et de la clarté des solutions proposées.*

Pour chacune des questions proposées, souligner la ou les réponse(s) justes et justifier vos choix

N°	QUESTIONS	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	La composée h **o** h' de l'homothétie h de centre A de rapport k et de l'homothétie h' de centre B de rapport 1 /k est …	l'identité du plan	une homothétie de rapport 1	la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$	la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si k=2
2	Deux droites D et D' de l'espace sont disjointes alors ces droites sont	parallèles	strictement parallèles	coplanaires	non coplanaires
3	L'équation sin x = cos x dans IR	a deux solutions	a une infinité de solution	équivaut à l'équation tan(x) = 1	équivaut à $2\sin^2 x=1$
4	Le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point d'intersection des	hauteurs	médianes	médiatrices	bissectrices
5	Un quadrilatère dont le cercle circonscrit admet ses diagonales comme diamètres est un	parallélogramme	rectangle	losange	carré
6	Dans l'espace orienté on donne 2 points B et C distincts, alors pour tout point A, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\ \overrightarrow{BC}$	vaut zéro	est le vecteur nul	est normal au vecteur $\overrightarrow{BC}$	est un vecteur de norme nulle
7	La limite en l'infini de $\frac{\sin x}{x}$	n'existe pas	est infini	est nulle	vaut 1 ou -1
8	La limite en 0^+ de la fonction f définie par : f(x) = sin(x). ln(x)	est $-\infty$	vaut 0	n'existe pas	vaut $+\infty$
9	L'équation d'inconnue complexe X définie par : $X^3 - 12X^2 + 48X - 128 = 0$	admet une solution entière qui divise 128	a une seule solution	admet au plus 3 solutions	admet 3 solutions complexes non réelles
10	Les courbes représentatives des	ont une	ont une	sont	ont un point

	solutions de l'équation différentielle 2y'+y = 0	asymptote verticale	asymptote horizontale	disjointes	commun
11	Un opérateur de téléphonie mobile a triplé le crédit de ses clients, le pourcentage d'augmentation est donc de	50%	100%	150%	300%
12	La somme des 100 premiers entiers naturels impairs est	1000	10000	un nombre impair	20000
13	ABC est un triangle, I le centre du cercle circonscrit.	(AI) est une médiane	(AI) est une médiatrice	(AI) est une hauteur	(AI) est une bissectrice
14	Soit Z le nombre complexe tel que Z = $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$. Alors	Z est réel	Z n'est ni réel ni imaginaire pur	Z^{12} est un réel négatif	$\mid Z\mid = 1$
15	L'intégrale $I = \int_{-1/2}^{0} xe^{-2x}\,dx$ vaut	-1/4	0	$\frac{-1}{2}e$	$\frac{1}{2}e$
16	Si $u = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, le complexe $(u^2)^8$est égale à	-2^{16}	1 + i	2^{16}	1
17	$f(x) = \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}-2}$. Le domaine de définition de f est	$IR\backslash\{0\}$	$IR\backslash\left\{0\,;\frac{1}{ln2}\right\}$	$IR\backslash\{0\,;-ln2\}$	$IR\backslash\left\{\frac{1}{ln2}\right\}$
18	La fonction g définie par $g(x) = x(1-lnx)^2$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$	est continue en 0	est dérivable en 0	n'est pas définie en 0	ne s'annule qu'en 0
19	$(-cos\theta + isin\theta)^n$ est égal à	$-\cos(n\theta) + isin(n\theta)$	$\cos(n\theta) + isin(n\theta)$	$\cos(n\theta) - isin(n\theta)$	$(-1)^n \cos(n\theta - isin(n\theta)$
20	Le nombre de façons de distribuer trois cadeaux distincts à trois enfants distincts est :	C_3^3	3!	9	3^3

MATHÉMATIQUES

2006 / Nombres complexes, équations différentielles et jeu de dé

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$

On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution de (E).

b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et $\sqrt{3}+1$. Placer les points A,B et C.

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3) On considère l'équation différentielle (1) $ay'' - by' + cy = 0$ où a, b et c désignent trois paramètres, éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur de b et le troisième, celle de c.

a) Justifier que l'équation différentielle : $ay'' - by' + c = 0$. a pour solutions les fonctions de la forme ,

. $x \longrightarrow (A\cos x + B\sin x)e^x$ où A et B sont des réel si et seulement si $1+i$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en z, $az^2 - bz + c = 0$.

b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme , .
. $x \longrightarrow (A\cos x + B\sin x)e^x$ A et B étant des constantes réelles.

2005 Calcul de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$

2) a) Développer $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$

$z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$

b) Soit l'équation E :

En posant, $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$ déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation E.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

2004 / Nombres complexes, transformations et suites

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ de raison $\frac{1}{2}$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1) a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b) En déduire z_n.

2) Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_o = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$

3) Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n.

a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}.

b) Donner ses éléments caractéristiques.

4) pour tout entier naturel n on pose $Z_n = z_0 z_1 z_2 \ldots\ldots z_n$.

a) Exprimer en fonction de n un argument de . Z_n

b) Démontrer que si n est impair alors Z_n réel.

2003/ Similitude directe

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : Z^3 + (1-8i)Z^2 - (23+4i)Z - 3 + 24i = 0$$

1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions de .(E)

(E)

c) Donner l'ensemble des solutions de.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i, 3i, -2+3i$.

soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs $2, -2$ et 1.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 2i,$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{8\pi}{4}}$. et

que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C.
Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

2002/ Equations dans C

1) — a/ Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $\varpi = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{4}$

b/ En déduire ses racines carrées

2) —Résoudre dans C l'équation suivante $z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$

3) - Soit la z_1 solution imaginaire pur et z_2 $l'autre$ solution, montre que $\dfrac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i} = \varpi$

4) — Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, soit, A, B, C les points

d'affines respectives $(2i)$ z_1, z_2 $préciser$ la nature du triangle (ABC) en utilisant 1) a/.

2001 : Nombres complexes et ensemble de points

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application de $C\{2i\}$ vers C $définie$ par : $f(z) = \dfrac{2z - i}{z - 2i}$

a) —Résoudre dans C : .$f(z) = z$

Donner les Z_1 et Z_2 solutions et sous forme algébrique puis sous forme trigonometrique

b) Calculer $Z_1^4 + Z_2^4$

1 /Soit $M(z)$ un point de P

Soit (Γ) $l'ensemble$ des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur. Donner une équation Cartésienne
(Γ) (Γ)

de . Tracer .

2 / Montrer que $|z| = 1$ équivaut à $|f(z)| = 1$.

2000 : Nombres complexes et similitudes

Dans l'ensemble C des nombres complexes on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$$

1) a) –Vérifier que (E) admet une solution réelle.

b) — Achever la résolution de l'équation (E)

2) - Dans le plan complexe on désigne par les points A, B, C d'affixes respectifs

$z_A = -1$; $z_B = -2 + i$; $z_C = i$. $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

a) – Déterminer le module et argument de .

b) - En déduire la nature du triangle ABC .

c) - Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

2006 : Etude de fonction et calcul d'aire

I. On considère la fonction f définie sur par : $\mathbb{R}$ $f(x) = x(1 + e^{2-x})$.

On note (C) sa courbe représentation dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$.

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b) En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.

c) Calculer $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de (C) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

f

3) a) Dresser le tableau de variation de.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}définie sur $\mathbb{R}$.

c) f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente au point d'abcisse 2.

e) Construire (C) (On tracera la tangente à(C) au point d'abscisse 2.

f) Construire (C) courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

II. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x=0$et $x=\lambda$ et les courbes d'équations respectives : $y=f(x)$et $y=x$.

Soit$a(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm²

1) Calculer $a(\lambda)$ en fonction de λ.

2) Déterminer $a=\lim\limits_{x\to+\infty} a(\lambda)$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2005 : Etude de fonction et bijection

PARTIE A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$

1) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1+x]=0$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe (Unité : 2 cm).

c) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $]-\infty,0[$

2) soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$.

a) démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que quel que soit le réel x, $g\prime(x)=e^{-x}.f(x)$

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$

d) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

3) a) Montrer que

b) A tout réel λ , on associe le réel $I(\lambda)=\int_0^{\lambda} g(x)dx$. Justifier l'existence de $I(\lambda)$. Calculer $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

PARTIE B

1) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

2) a) Calculer $g(0)$

b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point $ln2$.

c) Déterminer l'équation de la tangente à C_{g-1} au point d'abscisse $ln2$.

2004 : Etude de fonction et calcul d'aire

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f et trouver les trois réels a, b et c tels que, pour tout x de Df , on ait : $f(x)=ax+b+\frac{c}{e^x-1}$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de Df .

3) a) Déterminer la fonction dérivée de f .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2e^{2x}-5e^x+2=0$.

c) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f .

4) On appelle (C) la représentation graphique de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité est 2 cm.

Démontrer que les droites d'équations respectives : $y=2x-1$ et $y=2x-2$ sont des asymptotes de (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

Préciser l'autre asymptote.

Df (C)

5) Soit x un réel de , on considère les deux points M et M' de d'abscisses respectives x et -x, déterminer les coordonnées du milieu Ω de segment $[MM\prime]$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C)

(C)

6) Tracer la courbe .

7) a) trouver les réels α et β tels que, pour tout réel x de l'ensemble Df on fait : $f(x) = 2x + \alpha + \dfrac{\beta e^x}{e^x - 1}$

b) Soit k un réel supérieur ou égal à 2.

Déterminer l'aire $A(k)$ en cm² de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x ;y) vérifient :

$\ln 2 \leq x \leq \ln k$ et $2x - 1 \leq y \leq f(x)$.

c) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A(k)$

2003 : **Etude de fonctions**

A. On considère la fonction : $u : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \longrightarrow \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{2x}{x^2-1}$

1) déterminer l'ensemble de définition de u ;

calculer $u(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$

2) Etudier les variations de u.

dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1)

3) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall x \in [0, 1[, u(x) \geq 0$

b) $\forall x \in]1, +\infty[, u(x) < 0$

B) Soit g la fonction définie par : $g : [0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - 1$

1) Déterminer Dg (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.

2) vérifier que $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)}{2} \ln(1 + \dfrac{2}{x-1}) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

b) En déduire que Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0,1[$ tel que $g(\alpha)=0$

Donner un encadrement d'ordre 1 de α.

3) Tracer la courbe C_g de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité = 2 cm)

C. Soit la fonction définie par $f(x)=(x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$ et que $f'(x)=g(x), \forall x\in[0,1[$

2) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\alpha$.

2001 : Intersection d'une droite et d'une courbe

On considère la fonction g défini par : $\begin{cases} g(x)=x(1-\ln x)^2 si x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$ Où lnx désigne le logarithme népérien de x, on appelle sa courbe représentative dans un repère orthonormal ($\vec{O}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. a) – Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

b) – Etudier les variations de g.

c) – Tracer (C).

2. a) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0,e[$

Calculer à l'aide de deux intégrales par parties, l'aire A (α) du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$x=\alpha$ \ et \ $x=e$

b) – Calculer $\lim_{\alpha\to0^+} A(\alpha)$

3. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) et la droite $(\Delta) : y = x$

b) Pour quelles valeurs de m la droite $(\Delta_m) : y = mx$, recoupe-t-elle la courbe C en deux points $M_1 et M_2$ autres que 0 ?

c) La droite (Δ_m) coupe la droite D d'éqaution $x = e$ en P. Montrer que .$OM_1 x OM_2 = OP^2$

4. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[e, +\infty[$ admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable ?

Calculer $h(e^2)$; en déduire . $(h^{-1})'(e^2)$

c) Construire la courbe de h^{-1} s un repère ($\vec{O}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

2000 : Calcul intégral et bijection réciproque

Soit la fonction de $\mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(x) = x\ln(1+x)\ si\ x \geq 0 \end{cases}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

On désigne par (C) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation y = x.

Partie A

1-a) - Montrer que $f\ est\ continue\ en\ x_0 = 0$

b) – Etudier la dérivabilité de f en 0.

2-a) – Montrer que pour $x < 0$, $f\prime(x) > 0$.

b) – Etudier les variations de $f'\ sur\ [0; +\infty[$.

En déduire que pour x >0, f '(x) >0.

c) – Donner le tableau de variation de f.

3-a) Déterminer $\lim x \rightarrow -\infty$ $x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ \\ $on\ pourra\ poser u = \frac{1}{x}$

b) Montrer que $(D) : y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. On admettra que (C) est en dessous de (D).

4-a) – Construire (C), on précisera les coordonnées de I, point d'intersection de (C) et (Δ) pour x >0

b) – Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C) en . $+\infty$

Partie B

1) – Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+ : \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

2) – En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction F telle que :

$F(x) = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$ est primitive de f sur $\mathbb{R}$

3)–Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par $(\Delta), (C)$, (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

Partie C

1-a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1}

2) – Construire (C ') courbe représentative de f^{-1} dans le repère . $(0, \vec{i}, \vec{j})$

3) – Déduire du B.3) l'aire du domaine (D) ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq e-1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$

PROBABILITE

2004/ Variable aléatoire

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1) Calculer la probabilité de l'évènement A :"tirer trois pièces de 500 F".

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3) L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

2003/ Maladie du Sida

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.
On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie »

M l'évènement « être malade »

$\overline{M}$ est l'évènement contraire de M

On rappelle que pour tous évènements Aet Bon a :

$(*)\ A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A

1) a) Réécrire la relation $(*)$ pour $A = T$ et $B = M$ puis pour

$A = \overline{M}$ et $B = \overline{T}$.

b) En déduire que $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M})\left[1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})\right]$

2) Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

3) a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.

b) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

2001 : Epreuves de Bernoulli

Une urne contient 10 jetons $numérotés$ de 1 $à$ 10. Une partie consiste $à$ tirer successivement et sans remise 2 jetons de L'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

1. Quelle est la probabilité des événements :

$A = \ll$ les nombres inscrits sont strictement inférieur à 5 $\gg$.

$B = \ll$ le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second $\gg$.

2. Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes, quelle est la probabilité pour que $à$ $l'issue$ de la 7^{eme} partie $l'événement$ B soit r $é$ alis $é$ 2 fois exactement ? au moins une fois ?

2000 ; Variable aléatoire

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de $l'urne$, on note p_i $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 et p_6 sont dans cet ordre en progression $arithmétique$ de raison $\frac{1}{30}$

1-a) — Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$

b) — En déduire p_2 , p_3 , p_4 , p_5 , p_6

2) — On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable $aléatoire$ $égale$ au nombre de jetons portant un $numéro$ pair.

a) —Déterminer la loi de la probabilité de X.

b) — $Déterminer$ $l'espérance$ $mathématique$ de X puis son $écar$ t-type.

3) — Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) — Déterminer la loi de probabilité de S.

b) — On gagne à ce jeu lorsque $s \geq 0$. Déterminer la probabilité de gagner.

1997 : Variable aléatoire

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre ≪ couleur ≫ : pique, trèfle, carreau et cœur ;

Chaque ≪ couleur ≫ comprend huit cartes dont une carte as.

1) — On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité de chacun des évènenements suivants :

A : ≪ Les trois cartes sont des as ≫

B : ≪ Il y a au moins 2 couleurs ≫ parmi ces 3 cartes.

C : ≪ Il y a pas d'as parmi les 3 cartes ≫ .

2) — On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes .Le nombre de cœurs tirés définit une variable aléatoire X . Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X ; la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

STATISTIQUE

2005/ Statistiques à deux variables

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du point que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle x la variable statistique dont les valeurs sont x_i et y celle dont les valeurs sont les y_i.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y et x. La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

3) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs.

a) Déduire de la précédente question que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité :

$$z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$$

où x et z sont exprimés en milliers de francs.

b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

$\underline{NB}$: Prendre 2 chiffres aprés la virgule sans arrondir.

$\underline{Rappel}$: Bénéfice = Prix de vente – prix de revient.

2006 :

Les parties A et B sont indépendantes.

A- Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km/h: X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m: Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

1) Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 kh/h et en ordonnée 1cm pour 5 m.
NB :On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8 m.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

4) a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

b) Quelle devra etre sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

B - Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport : y / Cause des accidents : x	Particuliers : y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse : x_1	440	360
Accidents à cause mécanique : x_2	110	90

1) Déterminer l'effectif totale des accidents enregistrés lors de cette étude ?

2) Déterminer les fréquences conditionnelles f_{y_2/x_1} et f_{x_2/y_2}.

3) Déterminer les fréquences marginales f_1 et f_2

2002 : Corrélation et droite de régression

63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une épreuves de Math et une épreuve de Sciences Physiques : SP.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

$Note\ de\ Math$ / $Note\ de\ SP$	2	6	10	14	18	$Totaux$
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
$Totaux$	7	16	22	12	6	63

On appelle la série statistique des notes de Sciences Physiques et la série statistique des notes de $Math\acute{e}matiques$.

1. Déterminer pour chaque x_i la moyenne de la série conditionnelle y/x $X = (x_i)$

2. On considère la série double (x_i, z_i)

a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points .

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série $M(x_i, z_i)$ et Z=(z_i)

c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Z et X par la méthode des moindres $carr\acute{e}s$. d) Tracer cette droite.

1999 : statistique à deux variables

L'étude du poids P de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'âge x a conduit au tableau suivant :

$X(mois)$	1	2	3	4	5
$P(mg)$	7	13	25	47	88

1) - On pose $y = ln$ P ou ln désigne le logarithme népérien .

a) - Calculer les différentes valeurs prises par y à 10^{-2} prés.

b) -Tracer le nuage de points représentant les couples (X, Y) dans un système d'axes orthonormés

(unité 2 cm) : y placer le barycentre G du nuage.

2) – Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.

3) -Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

EPREUVES

CORRIGÉS

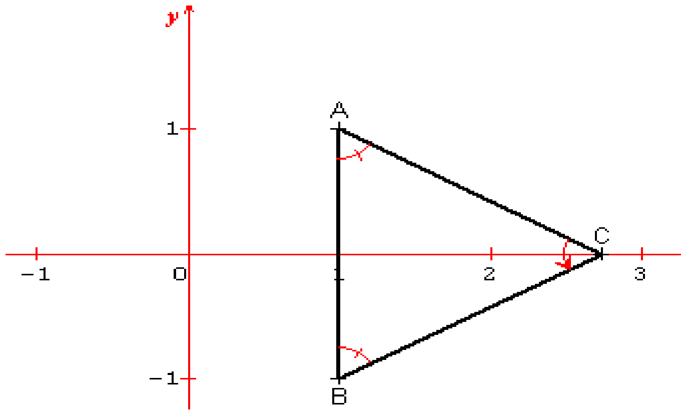
MATHEMATIQUES

2006/ Nombres complexes, équations différentielles et jeu de dé

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2z + 2 = 0$

$z^2 - 2z + 2 = 0$ $\quad (z-1)^2 + 1 = 0$ $\quad (z-1)^2 - i^2 = 0$ $\quad (z-1+i)(z-1-i) = 0$

$z = 1-i$ $\quad ou \quad$ $z = 1+i$ $\quad z_1 = 1+i$ $\quad z_2 = 1-i$

b) 

CAB est isocèle en C car z $_A$ = $\overline{z_B}$ et $C \in (Ox)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$ $\quad \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1-i-1-\sqrt{3}}{1+i-1-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4}$

$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ \ $= \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ainsi ABC équilatéral.

2) $\quad y'' - 2y' + 2y = 0$

$r^2 - 2r + 2 = 0$

l'équation caractéristique est

$\Delta' = 1-2 = -1 = i^2$ $\quad r_1 = 1+i$

d'où $y(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{x}$

3) On considère l'équation différentielle (1) : $ay'' - by' + cy = 0$, où a, b et c désignent trois paramètres, éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Si $ay''-by' + cy = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \to (A\cos x + B\sin x)e^{x}$ alors l'équation caractéristique $ar^2-br + c = 0$ admet $1+i$ pour solution dans $\mathbb{C}$.

Réciproquement

Si $1+i$ est solution dans $\mathbb{C}$ de $az^2-bz + c = 0$ alors $a(1+i)^2 - b(1+i) + c = 0$
$-b + c + i(2a - b) = 0$

ce qui entraine $b = c = 2a$ $\Delta = b^2-4ac = (2a)^2 - 8a^2 = -4a^2 < 0$

l'équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$ admet $1+i$ pour solution

l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$ a pour solution les fonctions de la forme $x \to (A\cos x + B\sin x)e^{x}$

b) Soit (E) l'évènement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme $x \to (A\cos x + B\sin x)e^{x}, A$ et B étants des constantes réelles " donc on a $b = c = 2a$

d'où (E) est constitué de résultats de la forme $(a, 2a, 2a)$ $(E) = \{(1,2,2),(2,4,4),(3,6,6)\}$

or $Card\Omega = 6^3$ $p(E) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$

2005/ Corrigé : Calcul de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

1) $z^3 - 1 = 0$ si et seulement si $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

résolvons l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$ $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

donc $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ d’où $z^3 - 1 = 0$ si et seulement si $z = 1$ ou $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

2) a) Développons $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

$$(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(-4i) = 4\sqrt{2}(-1-i)$$

b) $E : z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$

on pose $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$ donc $z^3 = u^3(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$

on en déduit que $u^3 = 1$ d’après 1) on a $u = 1$ ou $u = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ou $u = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

or $z = u(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ donc $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ ou $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou

$z = (\sqrt{2} -$ · $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ $z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ $z = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

c’est à dire

qui sont les racines de E sous forme algébrique.

exprimons ces racines sous forme trigonométrique. $z = u(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = u \times 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2ue^{-i\frac{\pi}{4}}$

on a

donc : pour $u = 1$, on obtient $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ pour $u = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, $z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

pour $u = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ d’où les racines de E sous forme trigonométrique sont :

$2e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{11\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{12}}$

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

on a eu $z = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ donc $e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d'où $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2004/ Nombres complexes, transformations et suites

1) a) (U_n) suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme U $_0 = 4$

$U_n = U_0 \times q^n$ $U_n = 4 \times \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ ($v_n)$ suite arythmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ e premier terme

$V_0 = \frac{\pi}{2}$

$$V_n = V_0 + nr \qquad V_n = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{N}$$

b) $|z_n| = U_n$ et un argument de z_n est V_n

$z_n = 4 \times \frac{1}{2^n} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}; n \in \mathbb{N}$

2) $z_{n+1} = 4 \times \frac{1}{2^{n+1}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}; n \in \mathbb{N}$ $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{4}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{4} \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}}$

$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$ $z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_n \Longrightarrow z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$

q= $\frac{1}{2}i$ $z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$

3)

a) $z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$ est l'écriture complexe d'une similitude plane directe. $(a = \frac{1}{2}i)$

b) $z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$ $a = \frac{1}{2}i$ $b = 0$

l'affixe du centre est O

un argument de a est $\frac{\pi}{2}$ donc F est la similitude plane directe centrée en l'origine de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

4)

a) $Z_n = z_0 z_1 z_2 --- z_n$ $\qquad z_k = \frac{4}{2^n} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$

$$Z_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{4}{2^k} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4^{n+1}}{2\sum_{k=0}^{n} k} e^{i\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)} \qquad Z_n = \frac{4^{n+1}}{2\sum_{k=0}^{n} k} e^{i\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$Z_n = \frac{4^{n+1}}{\frac{2(n+1)n}{2}} e^{i\left[(n+1)\frac{\pi}{4}+\frac{n(n+1)}{2}\frac{\pi}{2}\right]} \qquad Z_n = 2^{\frac{(n+1)(4-n)}{2}} e^{i(n+1)^2\frac{\pi}{4}}$$

b) Si n impaire

$$n = 2p+1 \Longrightarrow n+1 = 2p+2 \Longrightarrow (n+1)^2 = 4(p+1)^2$$

$$Z_{2p+1} = 2^{(p+1)(4-1-2p)} e^{i(p+1)^2\pi}$$

$$Z_{2p+1} = 2^{(p+1)(3-2p)} e^{i(p+1)^2\pi}$$

or $e^{i(p+1)^2\pi} = \pm 1$ donc Z_{2p+1} est réel.

2003/ Similitude directe $(E) : Z^3 + (1-8i)Z^2 - (23+4i)Z - 3 + 24i = 0$

1) a) posons $Z = ix, x \in \mathbb{R}$

on a $(ix)^3 + (1-8i)(ix)^2 - (23+4i)(ix) - 3 + 24i = 0$

$$-ix^3 - x^2 + 8ix^2 - 23ix + 4x - 3 + 24i = 0$$

$(-x^2+4x-3)+i(-x^3+8x^2-23x+24)=0$

$$\begin{cases} -x^2+4x-3=0 \\ -x^3+8x^2-23x+24=0 \end{cases}$$

$x=3$ est solution commune aux deux équations $Z_0=3i$

b) A l'aide du schéma de Horner ci dessous, on montre que $1+2i$ est solution de (E)

	1	1-8i	-23-4i	-3+24i
1+2i		1+2i	14-2i	3-24i
	1	2-6i	-9-6i	0

par la même méthode, on montre que $-2+3i$ est solution de (E).

c) Les solutions de (E) sont :

$\{3i; 1+2i; -2+3i\}$

2) le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

$A(1+2i)$ $B(3i)$ $C(-2+3i)$ G est le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs $2,-2$ et 1

a) $Z_G=\dfrac{2Z_A-2Z_B+Z_C}{2-2+1}$ $Z_G=2(1+2i)-2(3i)-2+3i$ $Z_G=i$

$\overrightarrow{GA}(Z_A-Z_G)$ $\overrightarrow{GA}(1+i)$ $\overrightarrow{GB}(3i-1)$ $\overrightarrow{GB}(2i)$

$\overrightarrow{GC}(-2+3i-i)$ $\overrightarrow{GC}(-2+2i)$

$|Z_{\overrightarrow{GA}}|=\sqrt{2}$ est un argument de $\dfrac{Z_{\overrightarrow{GA}}}{|Z_{\overrightarrow{GA}}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i$

$Z_{\overrightarrow{GA}}=\dfrac{\pi}{4}$

$Z_{\overrightarrow{GB}}=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\sin\frac{\pi}{4}$ donc $Z_{\overrightarrow{GA}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $|Z_{\overrightarrow{GC}}| = 2\sqrt{2}$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{GC}}}{|Z_{\overrightarrow{GC}}|} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Ainsi $Z_{\overrightarrow{GC}} = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $\frac{Z_{\overrightarrow{GB}}}{Z_{\overrightarrow{GA}}} = \frac{2e^{\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{GC}}}{Z_{\overrightarrow{GB}}} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}}{2e^{\frac{i\pi}{2}}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

donc $Z_{\overrightarrow{GA}}$, $Z_{\overrightarrow{GB}}$ et $Z_{\overrightarrow{GC}}$ sont en progression géométrique de raison $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

b) $Z_{\overrightarrow{GB}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} Z_{\overrightarrow{GA}}$

et $Z_{\overrightarrow{GC}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} Z_{\overrightarrow{GB}}$

$Z_B - Z_G = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}(Z_A - Z_G)$ et $Z_C - Z_G = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}(Z_B - Z_G)$

alors on a : $s(A) = B$ $s(B) = C$ $s(G) = G$

avec s similitude directe plane de centre G, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2002/ Equations dans C

Equations dans C (5 points-2002)

1. Les racines $n^{ième} del'unité$ sont :

$$z_k = e^{i\frac{2k\Pi}{n}} \quad , \quad k \in [\,0, n-1\,]$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 + z_1 + \ldots\ldots\ldots + z_{n-1}$$

$$= 1 + e^{i\frac{2\Pi}{n}} + \ldots\ldots\ldots + e^{i\frac{2\Pi}{n}(n-1)}$$

$$= \frac{(e^{i\frac{2\Pi}{n}})^n - 1}{e^{i\frac{2\Pi}{n}} - 1}$$

$$= \frac{e^{i2\Pi} - 1}{e^{i\frac{2\Pi}{n}} - 1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

2.Nous avons la somme des racines de l'unité est nulle.

$$1 + e^{i\frac{2\Pi}{5}} + e^{i\frac{4\Pi}{5}} + e^{i\frac{6\Pi}{5}} + e^{i\frac{8\Pi}{5}} = 0$$

c'est à dire $1 + \cos\frac{2\Pi}{5} + \cos\frac{4\Pi}{5} + \cos\frac{6\Pi}{5} + \cos\frac{8\Pi}{5} = 0$

$$\cos\left(\frac{4\Pi}{5}\right) = \cos\left(\Pi - \frac{\Pi}{5}\right) = -\cos\frac{\Pi}{5}$$

$$\cos\left(\frac{6\Pi}{5}\right) = \cos\left(\Pi + \frac{\Pi}{5}\right) = -\cos\frac{\Pi}{5}$$

$$\frac{8\Pi}{5} = 2\Pi - \frac{2\Pi}{5} = \cos\frac{2\Pi}{5}$$

$$1 + \cos\frac{2\Pi}{5} - \cos\frac{\Pi}{5} - \cos\frac{\Pi}{5} + \cos\frac{2\Pi}{5} = 0$$

$$1 + 2\cos\frac{2\Pi}{5} - 2\cos\frac{\Pi}{5} = 0$$

or $\cos\frac{2\Pi}{5} = 2\cos^2\frac{\Pi}{5} - 1$

donc $1 + 4\cos^2\frac{\Pi}{5} - 2 - 2\cos\frac{\Pi}{5} = 0$

$$4\cos^2\frac{\Pi}{5} - 2\cos\frac{\Pi}{5} - 1 = 0$$

2001/ Nombres complexes et ensemble de points

1-a)f(z)=0 $\Leftrightarrow z^2 - 2(i+1)z + i = 0$ dans $C - \{2i\}$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = \cos\frac{\Pi}{2} + i\sin\frac{\Pi}{2} \\ z_2 = \cos\frac{5\Pi}{2} + i\sin\frac{5\Pi}{2} \end{cases}$$

b)

$$Z_1^4 = (\cos\frac{\Pi}{4} + i\sin\frac{\Pi}{4})^4 = \cos\Pi + i \quad \sin\Pi = 1$$

$$Z_1^4 = (\cos\frac{5\Pi}{4} + i\sin\frac{5\Pi}{4})^4 = \cos 5\Pi + i \quad \sin 5\Pi = -1$$

$Z_1^4 + Z_2^4 = 0$

2- Soit $M(z)$ un point de P tel que $z = x + iy$. avec $z \neq 2i$

$$f(x) = \frac{2(x+iy)-i}{x+iy-2i}$$

$$= \frac{2x^2+2y^2-5y+2+i(3x)}{x^2+(y-2)^2}$$

$f(z)$ imaginaire puis $\acute{e}$ quivaut $\grave{a}$ $2x^2+2y-5y+2=0$ $avec \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$$C'est-\grave{a}-dire : x^2+y-\frac{5}{2}y+1=0(x \neq 0, y \neq 0)$$

$$d'o\grave{u} \; x^2+(y-\frac{5}{4})^2-\frac{9}{16}=0$$

$$(\Gamma) = \{M(x,y)/x^2+(y-\frac{5}{4})^2=\frac{9}{12}\} - \{(0,2)\}$$

3)-si $|z| = 1 \; alors$ $|f(x)|^2 = (\frac{2z-i}{z-2i})(\frac{2\;\bar{z}+i}{\bar{z}+2i})$

$$= \frac{4|z|^2+2i(z-\bar{z})+1}{|z|^2+2i(z-\bar{z})+4} \; en \;\; posant \;\; z = x+iy$$

$$= \frac{5-4y}{5-4y} = 1 \;\; avec \;\; y \neq \frac{5}{4}$$

donc si $|z| = 1 alors$ $|f(x)| = 1$ $avec$ $y \neq \frac{5}{4}$ $pour$ $z = x + y$

si $|f(x)| = 1 \; alors$ $4|z|^2+2i(z-\bar{z})+1 = |z|^2+2i(z-\bar{z})+4$

donc $z|z|^2 = 3 \; d'o\grave{u}$ $|z| = 1$ En résumé $|z| = 1 \Leftrightarrow |f(x)| = 1$ $avec$ $Imz \neq \frac{5}{4}$

2006/ Etude de fonction et calcul d'aire

I. $f(x) = x\left(1 + e^{2-x}\right)$

1) $h(x) = 1 + (1 - x)\,e^{2-x}$

a) $Dh = \mathbb{R}$

h est continue et dérivavle sur $\mathbb{R}$

$h\prime(x) = -e^{2-x} + (x-1)\,e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$

x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
h	$\searrow$ 0 $\nearrow$

b)

$h(2) = 1 - e^0 = 0$ $\quad h(x) > 0$, pour x $\in \mathbb{R} \backslash \{2\}$ $\quad h(2) = 0$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + e^{2-x}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ $\quad (C)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy)

c) $f(x) - x = xe^{2-x}$ $\quad f(x) - x = \dfrac{x}{e^x} \times e^2$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$

d) $f(x) - x = xe^{2-x}$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x) - x$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

x $\in]-\infty, 0[$, (C) en dessous de Δ x $\in]0, +\infty[$, (C) en dessus de Δ (C) et Δ se coupent en l'origine O

3) a)

$f'(x) = 1 + e^{2-x} + x\left(-e^{2-x}\right)$

$f'(x) = 1 + (1-x)e^{2-x} = h(x)$

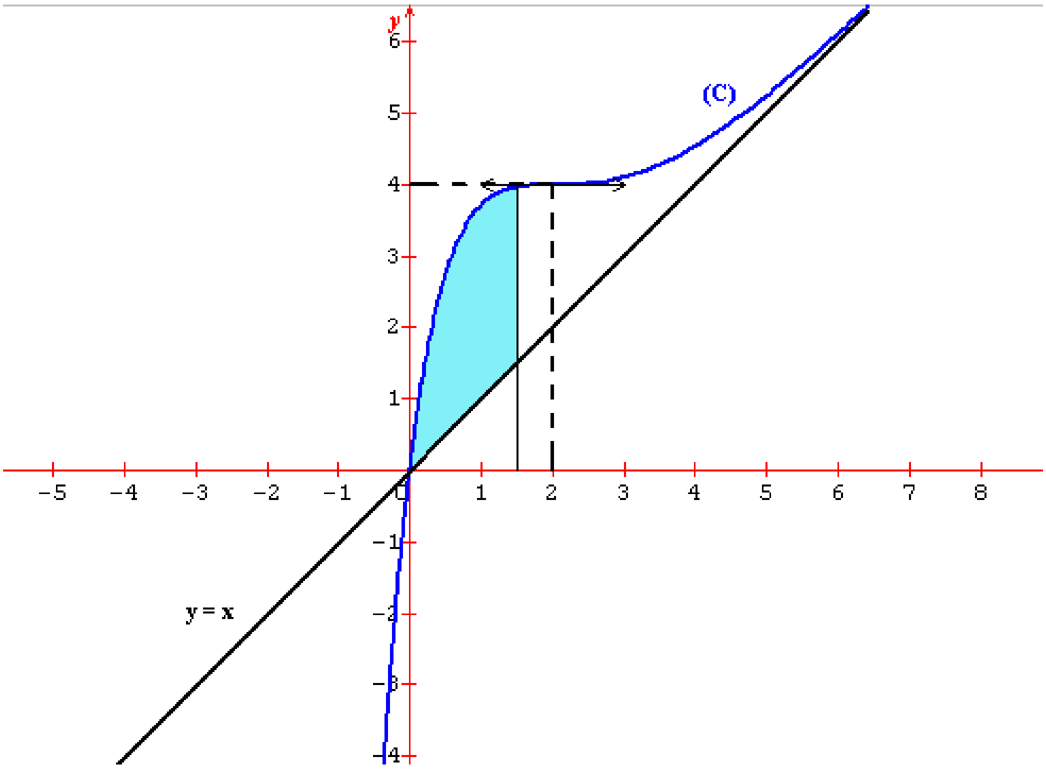
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

b) f continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f bijective de $\mathbb{R}$ sur lui même

c) $f(2) = 4$ $f^{-1}(4) = 2$ et $f'(2) = 0$ \ donc f^{-1} non dérivable en 4.

d) $T : y = 4$ pour $x \leqslant 2$, $f(x) \leq 4$ pour $x \geq 2$, $f(x) \geq 4$

e)



1.

$$R_\lambda = \{M(x,y), 0 \leqslant x \leqslant \lambda et x \leqslant y \leqslant f(x)\} \quad a(\lambda) = \int_0^X (f(x) - x)\, dx$$

$$a(\lambda) = 4\int_0^X x e^{2-x} dx \quad u = x \quad v = e^{2-x} \quad u' = 1 \quad v' = -e^{2-x}$$

$$a(\lambda) = 4\left[\left[-xe^{2-x}\right]_0^X + \int_0^X e^{2-x} dx\right]$$

$$a(\lambda) = 4\left[-xe^{2-x} - e^{2-x}\right]_0^X \quad a(\lambda) = 4\left[(x+1)e^{2-x}\right]_X^0 \quad a(\lambda) = 4e^2 - 4(X+1)e^{2-X}$$

$$a(\lambda) = 4e^2 - 4Xe^{2-X} - Xe^{2-X}$$

2.

$$a = \lim_{\lambda \to -\infty} a(\lambda) = 4e^2 cm^2$$

2005/ Etude de fonction et bijection

Partie A : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$

1) a) Etude des variations de f.

f(x) existe si et seulement si $1+e^x \succ 0$ or $1+e^x \succ 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)\right) = 0$ car $e^x \to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)\right) = -\infty$ car $\frac{e^x}{1+e^x} \to 1$ et $\ln(1+e^x) \to +\infty$

$x \to \frac{e^x}{1+e^x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ $x \to 1+e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$1+e^x > 0$ pour tout x $\in \mathbb{R}$ donc $\ln(1+e^x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

d'où f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 1 + x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) - 1 + x\right]$

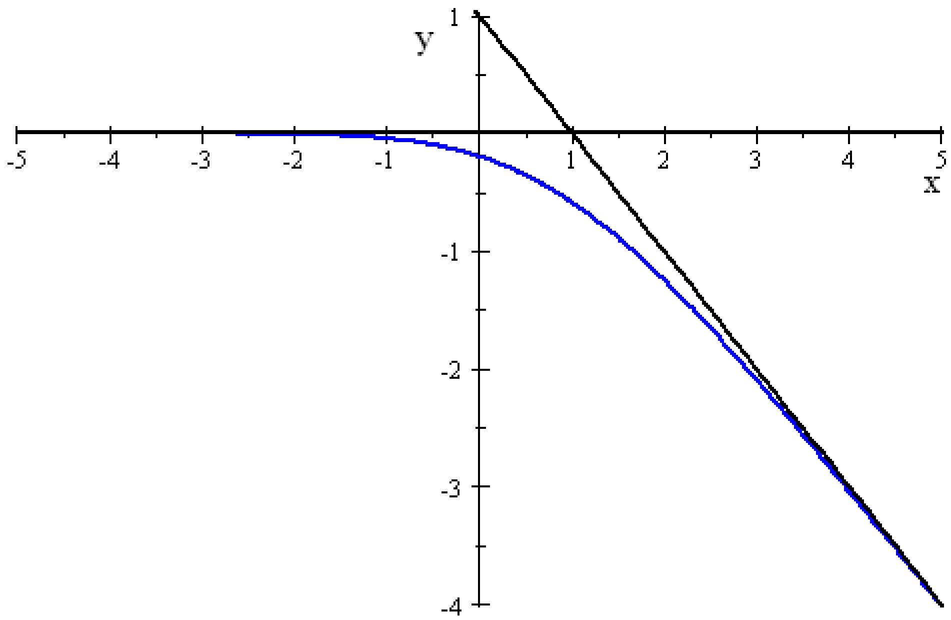
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x} - 1 + \ln e^x - \ln(1+e^x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x} - 1 + \ln\frac{e^x}{1-e^x}\right] = 0$$

on en déduit que la droite d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C)d en $+\infty$.

Courbe de f

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	0 $\searrow$ $-\infty$



c) f est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

donc f réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur l'image de $\mathbb{R}$ qui est égale à $]-\infty,0[$

2) $g(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$ a) pour tout $x\in\mathbb{R}, 1+e^{x}>0,$ donc $\ln(1+e^{x})$ est définie d'où $D_g=\mathbb{R}$

la fonction $x\to 1+e^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive. donc $\ln(1+e^{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. or e^{-x} est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

b) $g'(x)=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+e^{-x}\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ $\qquad$ $g'(x)=e^{-x}\left[\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln(1+e^{x})\right]=e^{-x}f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln(1+e^{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})\dfrac{\ln(1+e^{x})}{1+e^{x}}=0$

car $\frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x} \to 0$ et $(1+e^{-x}) \to 1$

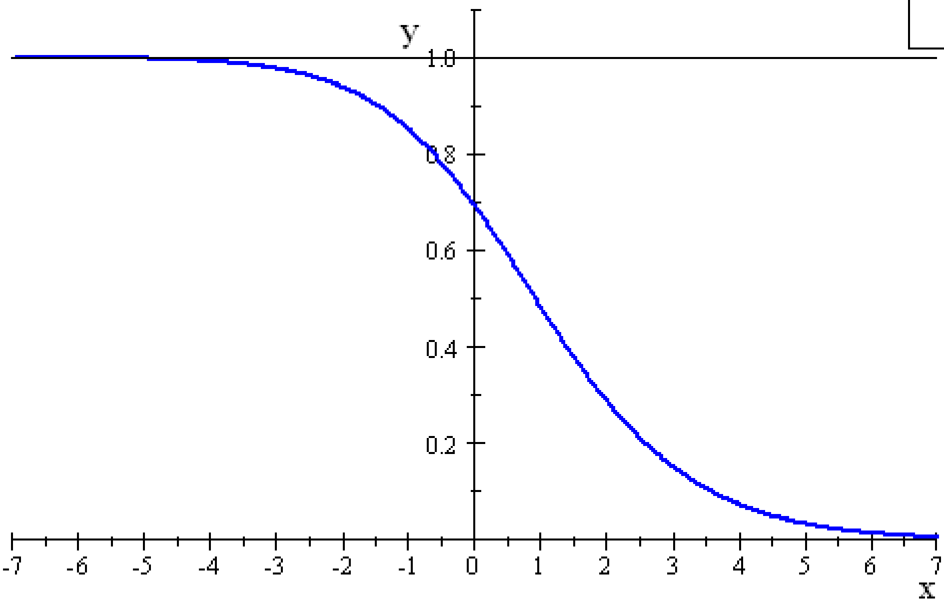
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \lim e^{-x}\ln(1+e^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

d) on a $g'(x) = e^{-x} f(x)$ or d'après 2) c) on a $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d'où $g'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
g	1 ↘	0

tableau de variation de g : courbe de g :



3)

a) $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ b) $\lambda \in \mathbb{R}$, $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x)dx$

g est continue sur $[0,\lambda]$ donc $I(\lambda)$ existe $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x)dx = \int_0^\lambda e^{-x}\ln(1+e^x)dx$

on pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \ln(1+e^x)$

on obtient $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

donc $\int_0^\lambda e^{-x}\ln(1+e^x)dx = \left[-e^{-x}\ln(1+e^x)\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda \frac{-e^{-x}e^x}{1+e^x}dx$

$= -e^{-\lambda}\ln(1+e^\lambda)+\ln 2+\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x}dx$

$= -e^{-\lambda}\ln(1+e^\lambda)+\ln 2+\int_0^\lambda \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$=-$e^{-\lambda}\ln(1+e^\lambda)+\ln 2-[\ln(1+e^x)]_0^\lambda$

$I(\lambda)=2\ln 2-\ln(1+e^{-\lambda})-e^{-\lambda}\ln(1+e^\lambda)$

c) déterminons la limite de $I(\lambda)$ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln(1+e^{-\lambda})=0$ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda}\ln(1+e^\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}g(\lambda)=0$

d'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)=2\ln 2$

partie B :

1) gest continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J=g(\mathbb{R})=]0,1[$

2)

a) $g(0)=e^0\ln(1+e^0)=\ln 2$

b) montrons que g^{-1} est dérivable au point $\ln 2.$

g est dérivable en 0 et $g'(0)\neq 0$ $(g'(x)<0$ sur $\mathbb{R})$ alors g^{-1} est dérivable au point $\ln 2=g(0)$

c) équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse $\ln 2$

$y=(g^{-1})'(\ln 2)(x-\ln 2)+g^{-1}(\ln 2)$ $(g^{-1})'(\ln 2)=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\ln 2}=\frac{2}{1-2\ln 2}$

donc $y = \frac{2}{1-2\ln 2}(x-\ln 2)+0 = \frac{2}{1-2\ln 2}(x-\ln 2)$ $y = \frac{2}{1-2\ln 2}(x-\ln 2)$

2004/ Etude de fonction et calcul d'aire

$f(x) = \frac{(2x-1)e^{x}-2x+2}{e^{x}-1}$

1) $f(x)$ existe entre $\{x \in \mathbb{R}$ et $e^{x}-1 \neq 0\}$

posons $e^{x}-1=0 \Longleftrightarrow e^{x}=1 \Longleftrightarrow x=\ln 1=0$ donc D $_f = \mathbb{R}^*$

posons $f(x) = ax+b+\frac{c}{e^{x}-1}$ $f(x) = \frac{ax(e^{x}-1)+b(e^{x}-1)+c}{e^{x}-1}$

$f(x) = \frac{(ax+b)e^{x}-ax+c-b}{e^{x}-1}; x \neq 0$ d'autre part $f(x) = \frac{(2x-1)e^{x}-2x+2}{e^{x}-1}; x \neq 0$

par identification $a=2$ $b=-1$ $c=b+2=1$ ainsi $a=2$ $b=-1$ $c=1$

2) Limites aux bornes $f(x) = 2x-1+\frac{1}{e^{x}-1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}-1) = -1$ Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}-1} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-}(e^{x}-1) = 0^-$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{e^{x}-1} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

de même $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = +\infty$

2) a) calcul de $f'(x)$ $f(x) = 2x-1+\frac{1}{e^{x}-1}$

$f'(x) = (2x-1)'+\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right)'$; $x \neq 0$

$$f\prime(x)=2-\frac{e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}=\frac{2(e^{x}-1)^{2}-e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}} \quad f\prime(x)=\frac{2e^{2x}-5e^{x}+2}{(e^{x}-1)^{2}}$$

b) posons $e^{x}=t$ et $2(e^{x})^{2}-5(e^{x})+2=0$ donc $2t^{2}-5t+2=0$

$\Delta=25-16=9$; $\sqrt{\Delta}=3$ $t=\frac{5-3}{4}$ ou $t=\frac{5+3}{4}$ $t=\frac{1}{2}$ ou $t=2$

$x=-ln2$ ou $x=ln2$

c)

$$2e^{2x}-5e^{x}+2=2\left(e^{x}-\frac{1}{2}\right)(e^{x}-2) \quad 2e^{2x}-5e^{x}+2=(2e^{x}-2)(e^{x}-2)$$

$$f(ln2)=\frac{(2\ln 2-1)2-2\ln 2+2}{2-1}=2\ln 2$$

$$f(-ln2)=\frac{(-2\ln 2-1)\frac{1}{2}+2\ln 2+2}{\frac{1}{2}-1}=\frac{-\ln 2+-\frac{1}{2}+2\ln 2+2}{-\frac{3}{2}}=\left(\ln 2+\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$f(-ln2)=-\frac{2}{3}\left(\ln 2+\frac{3}{2}\right)$$

tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{-2}{3}(ln2+\frac{3}{2})$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2$	↗	$+\infty$

4)

$$f(x)=2x-1+\frac{1}{e^{x}-1} \qquad [f(x)-(2x-1)]=\frac{1}{e^{x}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}-1}=0$$

donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote de (C)

$f(x) - (2x-2) = 2x - 1 + \frac{1}{e^{x} - 1} - 2x + 2 \qquad f(x) - (2x-2) = \frac{1}{e^{x}-1} + 1$

$f(x) - (2x-2) = \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$ or $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-2)] = \frac{0}{0-1} = 0$

donc $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-2)] = 0$ la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote de (C)

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote de (C)

5) $x_{\Omega} = \frac{x + (-x)}{2} = 0 \qquad y_{\Omega} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^{x}-1}$

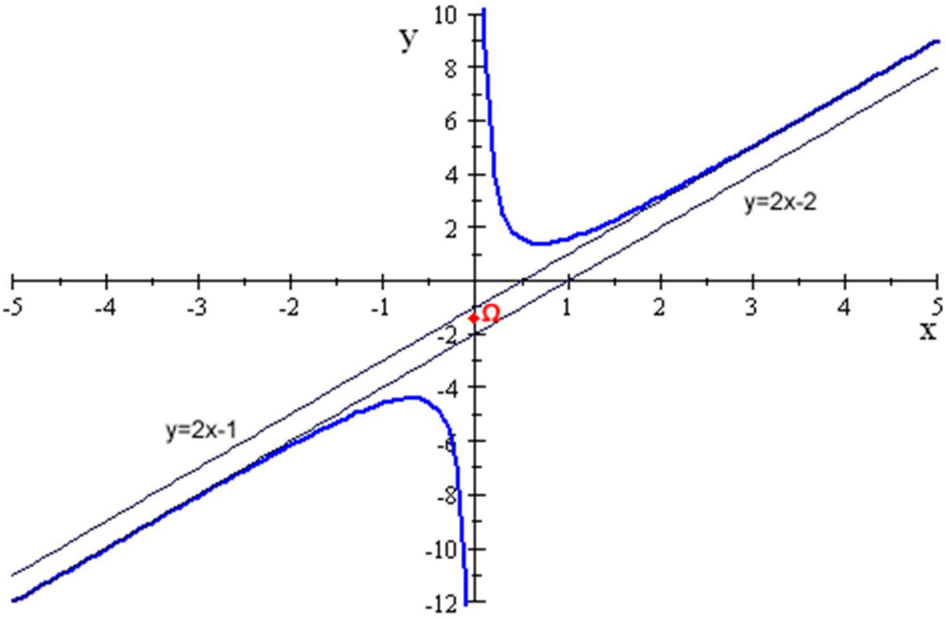
$f(-x) = -2x - 1 + \frac{1}{e^{-x}-1}$

$f(x) + f(-x) = -2 + \frac{1}{e^{-x}-1} + \frac{1}{\frac{1-e^{x}}{e^{x}}} = -2 + \frac{1}{e^{-x}-1} + \frac{e^{x}}{1-e^{x}}$

$f(x) + f(-x) = -2 + \frac{1-e^{x}}{e^{x}-1} \quad ; \quad x \neq 0 \qquad f(x) + f(-x) = -3 \qquad \frac{f(x)+f(-x)}{2} = -\frac{3}{2}$

$\Omega(0, -\frac{3}{2})$ est centre de symétrie

6) Courbe de f :



7) a) $f(x)=2x+\alpha+\dfrac{\beta e^{x}}{e^{x}-1}$

$$f(x)=\frac{2x\ (e^{x}-1)-\alpha(e^{x}-1)+\beta e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{(2x+\alpha+\beta)\,e^{x}-2x-\alpha}{e^{x}-1}\qquad ;\qquad x\neq 0$$

$$f(x)=\frac{(2x-1)\,e^{x}-2x+2}{e^{x}-1}$$

par identification $\alpha+\beta=-1$ $\quad \alpha=2$ $\quad \alpha=-2$ et $\beta=1$ $\qquad f(x)=2x-2+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$

b) k est un réel supérieur ou égal à 2 $\qquad f(x)-(2x-1)=-1+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$

$$A(k)=\int_{\ln 2}^{\ln k}\left(-1+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)dx\times 4cm^2 \qquad A(k)=\left[-x+\ln\ (e^{x}-1)\right]_{\ln 2}^{\ln k}\times 4cm^2$$

$$A(k)=\left[\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\right)\right]_{\ln 2}^{\ln k}\times 4cm^2 \qquad A(k)=\left[\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]\times 4cm^2$$

$$A(k)=\left[\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)+\ln 2\right]\times 4cm^2 \qquad A(k)=4\ln\left[2\left(\frac{k-1}{k}\right)\right]cm^2$$

c) $\lim_{k\to+\infty} A(k) = 4\ln 2 cm^2$

2003 :

$u : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \longrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$

1) $n(x)$ existe $\iff x \geq 0$ et $\frac{x+1}{x-1} \neq 0$

donc $D_u = [0;1[\cup]1,+\infty[$ $\quad u(o) = ln\,|1| - \frac{-2(0)}{0^2-1}$ $\quad u(o) = 0$

pour

$x > 1, u(x) = ln(\frac{x+1}{x-1}) - \frac{2x}{x^2-1}$

$\frac{x+1}{x-1}$ tend vers 1 en + ∞ et $\frac{2x}{x^2-1}$ tend vers 0 donc $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$

2) Calcul de $u'(x)$ $\quad u'(x) = \frac{(\frac{x+1}{x-1})\prime}{\frac{x+1}{x-1}} - (\frac{2x}{x^2-1})\prime$

$u'(x) = \frac{-2}{x^2-1} - 2\left[\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}\right]$ $\quad u'(x) = \frac{4}{(x^2-1)^2}$ $\quad u'(x) > 0$ sur Du

tableau de variation de u

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	‖	$+$
u	0 ↗	‖	↗ 0

3) a) la fonction $x \to u(x)$ strictement croissante sur $[0,1[$ et $u(0) = 0$

si $0 \leq x < 1$ alors $u(0) \leq u(x)$ d'où $u(x) \geq 0$ sur $[0,1[$

b) la fonction $x \to u(x)$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$

or $\lim u(x) = 0$ donc $u(x) < 0$ sur $]1, +\infty[$

B) $g : [0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$ 1) $g(x)$ existe $x \geq 0$ et $\frac{x+1}{x-1} > 0$ $Dg = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \to 1} g(x) = +\infty$ car $\left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ tend vers $+\infty$

2) a) $1 + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$

posons $t = \frac{2}{x-1}$, si $x \mapsto +\infty$ alors $t \to 0$ donc $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln(1 + \frac{2}{x-1}) = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

b) sur $]1, +\infty[$ $g(x) = x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$ or $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ $g(x) = x \ln(1 + \frac{2}{x-1}) - 1$

$g(x) = 2\frac{x}{2} \ln(1 + \frac{2}{x-1}) - 1$ or $\frac{x}{2} = (\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$

$g(x) = \left[2(\frac{x-1}{2}) \ln(1 + \frac{2}{x-1}) \right] + \ln(1 + \frac{2}{x-1}) - 1$

or en $+\infty$ $\ln(1 + \frac{2}{x-1})$ tend vers et $\frac{(x-1)}{2} \ln(1 + \frac{2}{x-1})$ tend vers 1

d'où $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2 - 1 = 1$

la courbe de g admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale

d'équation $y = 1$ c) calcul de $g'(x)$ d'abord sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ la fonction

$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est dérivable et est strictement positive donc $x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ dérivable sur

$[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ par produit $x \mapsto x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ dérivable sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$

d'où g est dérivavle sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$

$g'(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{-2x}{x^2-1}$ $\qquad g'(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1} = u(x)$

or $u(x) > 0$ sur $[0,1[$ et $u(x) < 0$ sur $]1,+\infty[$

tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$-$	
g	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

on a $g(0) = -1$

d) la fonction $x \mapsto g(x)$ continue et strictement croissante sur $]0,1[$

donc $x \to g(x)$ est une bijection de $]0,1[$ sur $]-1,+\infty[$

donc $x \mapsto g(x)$ bijection $]0,1[$ sur $]-1,+\infty[$ de plus $0 \in]-1,+\infty[$

ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$

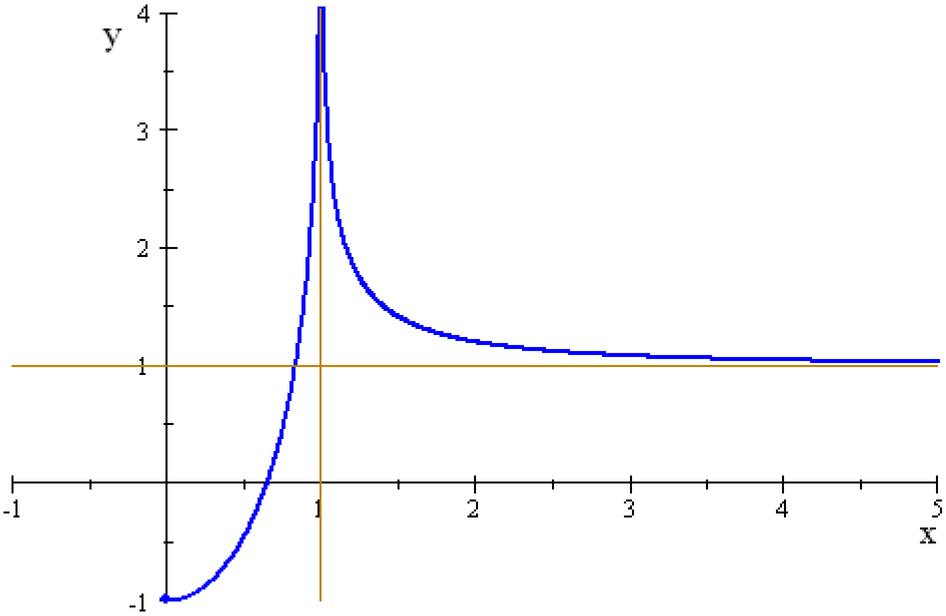
Encadrement de α

on a :

x	0	0,5	0,6	0,7
g(x)	-1	-0,45	-0,17	0,21

donc $0,6 < \alpha < 0,7$

3) Courbe de g



C)

$f(x) = (x^2-1)\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ 1) dérivabilité de f sur $[0,1[$?

sur $]-1,1[$, $x \to \dfrac{x+1}{1-x}$ est dérivable et strictement positive donc $x \to \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ est dérivable sur cette intervalle

ce qui entraine que $x \to (x^2-1)\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ est dérivable sur cette intervalle

d'où f est dérivable sur $[0,1[$ Et on a $f(x) = (x^2-1)\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} = \dfrac{(x^2-1)}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

$f'(x) = x\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{(x^2-1)}{2} \times \dfrac{-2}{1-x^2} = x\ln\dfrac{1+x}{1-x} - 1 = g(x)$ $f'(x) = g(x)$ sur $[0,1[$

2) Déterminons l'aire A du domaine plan limité par la courbe , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

$A = -\int_0^{\alpha} g(x)dx \times 4cm^2$ $A = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx \times 4cm^2$ $A = [f(x)]_{\alpha}^{0} \times 4cm^2$

$A = [f(0) - f(\alpha)] \times 4cm^2$ $A = -4f(\alpha).cm^2 = +4(1-\alpha^2)\ln(\frac{\alpha+1}{1-\alpha})cm^2$ or $g(\alpha) = 0$

$\alpha \ln(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) - 1 = 0$ $\ln(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) = \frac{1}{\alpha}$ $A = \frac{4(1-\alpha^2)}{\alpha}cm^2$

2004 : Variable aléatoire

1) Total des pièces = 10 $p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}} = \frac{4}{10\times 3\times 4}$ $p(A) = \frac{1}{30}$

2) a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$p(X=0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3}$ $p(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3}$ $p(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3}$

$p(X=0) = \frac{CC_6^3}{C_{10}^3}$ $p(X=0) = \frac{20}{120}$ $p(X=3) = \frac{4}{120}$

$p(X=2) = \frac{36}{120}$ $p(X=1) = \frac{60}{120}$

xi	0	1	2	3
pi	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

b) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$

$E(X) = 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120}$

$E(X) = \frac{6}{8}$ $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 p_i - (E(X))^2}$ $\sigma(X) = \sqrt{0,56} \simeq 0,75$

3)

On a ici une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre

$n=5$ et $p=\dfrac{1}{30}$ Soit Y cette variable aléatoire $p(Y=3)=C_5^3\left(\dfrac{1}{30}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{30}\right)^2$

$p(Y=3)\simeq 3,46.10^{-4}$

2003 : Maladie du sida

On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie »

M l'évènement « être malade » $\overline{M}$ est l'évènement contraire de M

pour tous évènements A et B on a : $(*)\ A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

et $p_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A

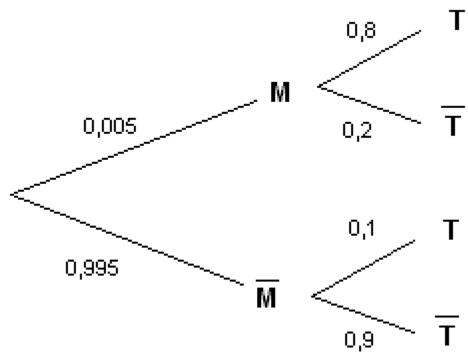
b) a) pour $A=T$ et $B=M$ on a $T=(T\cap M)\cup(T\cap\overline{M})$ (1) pour $A=\overline{M}$ et $B=\overline{T}$

on obtient $\overline{M}=(\overline{M}\cap\overline{T})\cup(\overline{M}\cap T)$ (2) b) en utilisant la relation (2)

$P(\overline{M})=p(\overline{M}\cap\overline{T})+p(\overline{M}\cap T)$ car $\overline{M}\cap\overline{T}$ et $\overline{M}\cap T$ sont deux événements incompatibles

donc $p(\overline{M}\cap T)=p(\overline{M})-p(\overline{M}\cap\overline{T})$ $p(\overline{M}\cap T)=p(\overline{M})-p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(\overline{T})$

donc $p(\overline{M}\cap T)=p(\overline{M})\left[1-p_{\overline{M}}(\overline{T})\right]$ 2) faisons d'abord le diagramme pondéré



$p(T) = p(M \cap T) + p(T \cap \overline{M}) \quad p(T) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T)$

$p(T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 \qquad p(T) = 0,1035$

3)a) $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{p_M(T) \times p(M)}{p(T)} = \dfrac{0,005 \times 0,8}{0,1035} \qquad p_T(M) = \dfrac{8}{207}$

b) $p_{\overline{T}}(M) = \dfrac{p(M \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \dfrac{p(M) \times p_M(\overline{T})}{p(\overline{T})} = \dfrac{0,005 \times 0,2}{1 - 0,1035} \qquad p_{\overline{T}}(M) = \dfrac{2}{1793}$

1997 : Variables aleatoires

1/ On tire simultanément 3 cartes $d'un$ jeu de 32 cartes.

L'ensemble des éventualités est l'ensemble des cartes $\grave{a}$ 3 éléments de $l'e$ nsemble des cartes.

Donc $Card\ \Omega = C_{32}^3 = 4960 \quad A : \ll$ les cartes sont des as $\gg \quad C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$Card\ A = C_4^3 = 4 \qquad P(A) = \dfrac{Card A}{Card \Omega} = \dfrac{1}{1240} = 0,0008$

$B : \ll$ Il y a au moins $\ll$ 2 couleurs $\gg$ parmi ces 3 cartes $\gg$

On a $\bar{B}$ c' est $l'évén$ ement $\ll$ les 3 cartes sont de même couleur $\gg$

$Card \bar{B} = 4 * C_8^3 = 2 \qquad P(B) = \dfrac{Card \bar{B}}{Card \Omega} = \dfrac{7}{155} \qquad P(B) = 1 - P(\bar{B})$ donc

$P(B) = \dfrac{148}{155} = 0,95$

$C : \ll$ Il y a pas d'as parmi les 3 cartes $\gg \quad Card\ C = C_8^3 = 3276 \qquad P(C) = \dfrac{Card C}{Card \Omega} = 0,66$

2/ On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu

Soit Ω $l'e$nsemble des éventualités. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ La loi de la probabilité de X

On a $Card\Omega = 32 * 32 * 32$ $$P(X=0) = \frac{Card(X=0)}{Card\Omega} = \frac{24*24*24}{32*32*32} = \frac{27}{64} \simeq 0.42$$

$$P(X=1) = \frac{Card(X=1)}{Card\Omega} = \frac{3*8*24*24}{32x32x32} = \frac{27}{64} \simeq 0.42$$

$$P(X=2) = \frac{Card(X=2)}{Card\Omega} = \frac{3*8*8*24}{32*32*32} = \frac{9}{64} \simeq 0.14$$

$$P(X=3) = \frac{Card(X=3)}{Card\Omega} = \frac{8*8*8}{32*32*32} = \frac{1}{64} \simeq 0.01$$

Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = p(x=1) + 2p(x=2) + 3p(x=3)$

$$= \frac{27}{64} + 2*\frac{9}{64} + 3*\frac{1}{64} = \frac{3}{4} \qquad E(X) = 0.75$$

2005 : Statistiques à deux variables

Le tableau ci dessous y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs est x_i

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1) Calcul du coefficient de correlation linéaire

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{60+80+100+120+140+160+180+200}{8} = \frac{1040}{8} = 130$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = \frac{952+805+630+522+510+324+205+84}{8} = \frac{4032}{8} = 504$$

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i^2}{8}-\overline{x}^2=\frac{152000}{8}-(130)^2=2100 \quad V(y)=\frac{\sum_{i=1}^{8}y_i^2}{8}-\overline{y}^2=\frac{2637870}{8}-(504)^2=75717,75$$

$$cov(x,y)=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i}{8}-\overline{xy}=\frac{424100}{8}-130\times 504=-12507,5$$

d'où : $r=\dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}=\dfrac{-12507,5}{45,83\times 275,17}=-0,99$ $\quad r\simeq -1,$

donc la valeur trouvée justifie la recherche d'un ajustement linéaire.

2) équation de la droite de régression de y en x.

$y=ax+b$, avec : $a=\dfrac{cov(x,y)}{V(x)}=\dfrac{-12507,5}{2100}=-5,95$

$b=\overline{y}-a\overline{x}=504-(-5,95)(130)=1277,5$ $\quad y=-5,95x+1277,5$

3) Les frais de conception sont de 28000000 F. le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 F.

a) x est le prix de vente, donc y est le nombre d'exemplaires du produit.

le prix de vente est $yx=(-5,95x+1277,5)x$ en milliers de francs

le prix de revient est $25000y+28000000=25y+28000$ en milliers de francs.

donc $z=(-5,95x+1277,5)x-25y-28000$

$$z=(-5,95x+1277,5)x-25(-5,95x+1277,5)-28000$$

$$z=-5,95x^2+1426,25x-59937,5$$

b) Déterminons le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum.

on a $z(x) = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$

z est une fonction continue et dérivable en x sur $\mathbb{R}$ et : $z'(x) = -11,9x + 1426,25$

$z'(x) = 0$ si $x = 119,85$ on voit ainsi que z atteint son maximum pour $x = 119,85$ en milliers de francs.

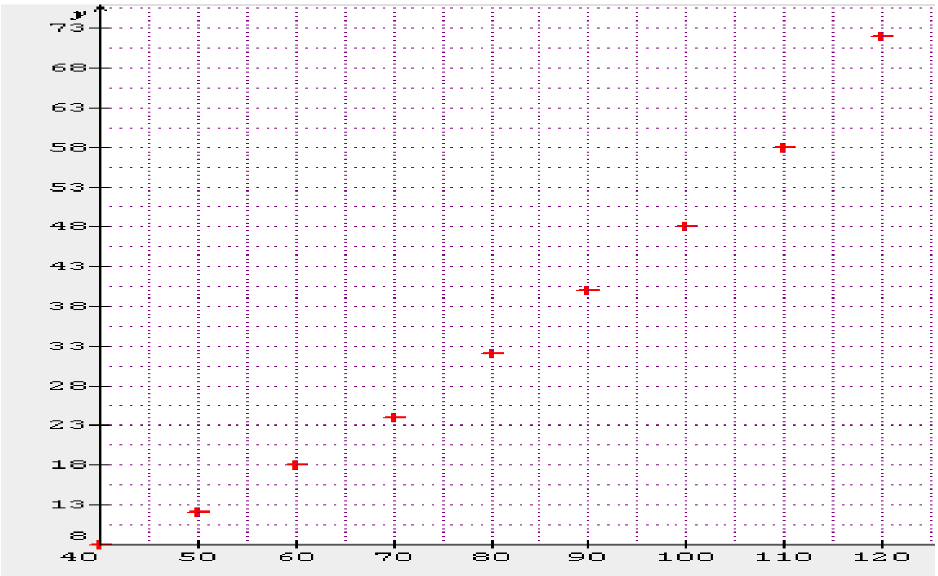
donc le prix de vente permettant de réaliser un bénéfice maximum est $x = 119.850$ F.

$z(119,85) = -5,95(119,85)^2 + 1426,25(119,85) - 59937,5 = 25532,628$ en milliers de francs

D'où le bénéfice maximum est $25.532.628$ F

2006 : Statistiques

1) nuage de points



2)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
40	8	1600	64	320
50	12	2500	144	600
60	18	3600	324	1080
70	24	4900	576	1680
80	32	6400	1024	2560
90	40	8100	1600	3600
100	48	10000	2304	4800
110	58	12100	3364	6380
120	72	14400	5184	8640
720	312	63600	14584	29660

Equation de la droite de regression

$y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(x,y)}{V(x)} = \frac{522,22}{666,67} = 0,783$ $b = \overline{y} - a\overline{x} = 34,6 - 0,783 \times 80 = -28$

d'où $Y = 0,783x - 28$

3) Déterminons le coefficient de corrélation r

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} = \frac{522,22}{25,82 \times 20,46} = 0,988$$

$r = 0,988 \simeq 1$ Nous avons une bonne corrélation

4) a) On suppose que cette évolution se poursuit

Si $x = 150$ alors $y = 0,783 \times 150 - 28 = 89,45 \geq 85$ oui, il percutera l'obstacle

b) Soit x sa vitesse maximale au moment du freinage.

Pour ne pas heurter l'obstacle il faut $y < 85$

$y < 85 \implies 0,783x - 28 < 85 \implies 0,783x < 85 + 28$

$$\implies x < \frac{113}{0,783} = 144,32$$

B)

	Y_1	Y_2	totaux
X_1	$n_{11} = 440$	$n_{12} = 360$	$n_{1*} = 800$
X_2	$n_{12} = 110$	$n_{22} = 90$	$n_{2*} = 200$
totaux	$n_{*1} = 550$	$n_{*2} = 450$	N=1000

1) l'effectif total des accidents enregistré lors de cette étude est :

$$N = 440 + 360 + 110 + 90 = 1000$$

2) fréquences conditionnelles

$$f_{y2/x1} = \frac{n_{12}}{n_{1\circ}} = \frac{360}{800} = \frac{45}{100} = 45\% \qquad f_{x2/y2} = \frac{n_{22}}{n_{\circ 2}} = \frac{90}{450} = \frac{1}{5} = 20\%$$

3) fréquences marginales $f_{\circ 1} = \frac{n_{\circ 1}}{N} = \frac{550}{1000} = 55\% \qquad f_{2\circ} = \frac{n_{2\circ}}{N} = \frac{200}{1000} = 20\%$