# NOMBRES COMPLEXES (Partie 3)

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

## I. Forme exponentielle d'un nombre complexe

### 1) Définition

Posons $f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$.
En prenant $|z|=|z'|=1$, on a démontré dans la Parie 2 (II.) que :
$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\left(\cos\theta'+i\sin\theta'\right)=\cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin\left(\theta+\theta'\right)$.
Soit : $f(\theta)f(\theta')=f(\theta+\theta')$.
On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles : $e^{\theta}e^{\theta'}=e^{\theta+\theta'}$.

Définition : Pour tout réel $\theta$, on a : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

Remarque :
$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$.

Propriété : $e^{i\pi}=-1$

Démonstration :
$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\times 0=-1$

Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre *e*), l'algèbre (avec le nombre *i*) et la géométrie (avec le nombre $\pi$).

Exemples :
$e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1+i\times 0=1$

$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\times 1=i$

Définition : Tout nombre complexe $z$ non nul de module $r$ et d'argument $\theta$ s'écrit sous sa forme exponentielle $z=re^{i\theta}$.

## 2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$, pour tout entier naturel $n$ non nul,

a) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ b) $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ c) $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ d) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Remarque :
La formule b) s'appelle formule de *Moivre*.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

**Vidéo** https://youtu.be/tEKJVKKQazA
**Vidéo** https://youtu.be/zdxRt5poJp0

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :
a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -5$
2) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :
a) $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) a) - $|z_1| = |-2i| = 2$

- $\dfrac{z_1}{|z_1|} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

On cherche donc un argument $\theta$ de $z_1$ tel que $\sin\theta = -1$.

Comme $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, l'argument $-\dfrac{\pi}{2}$ convient.

$\dfrac{z_1}{|z_1|} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) - $|z_2| = |-5| = 5$

- $\dfrac{z_2}{|z_2|} = \dfrac{-5}{5} = -1$

On cherche donc un argument $\theta$ de $z_2$ tel que $\cos\theta = -1$.

Comme $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$, l'argument $\pi$ convient.

$\dfrac{z_2}{|z_2|} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$ donc $z_2 = 5(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 5e^{i\pi}$.

2) a) $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

b) $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

## II. Applications à la géométrie

Propriété : A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives $z_A, z_B, z_C$ et $z_D$. On a :

a) $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)$

b) $AB=\left|z_B-z_A\right|$

c) $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$

Démonstrations :

a) On considère un point E tel que $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AB}$.
Alors E a pour affixe $z_B-z_A$.
Donc $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)$ et donc $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)$

b) $\left|z_B-z_A\right|=\left|z_E\right|=OE$
Comme $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AB}$, $OE=AB$ donc $\left|z_B-z_A\right|=AB$

c) $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\vec{u}\right)+\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{CD}\right)$

$=\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{CD}\right)-\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)$

$=\arg\left(z_D-z_C\right)-\arg\left(z_B-z_A\right)$

$=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$

Méthode : Utiliser les nombres complexes en géométrie

Vidéo https://youtu.be/NjLZfbqRFB0

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A=-2-i$, $z_B=1-2i$ et $z_C=-1+2i$.
1) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

1) $AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|1-2i-(-2-i)\right|=\left|3-i\right|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$AC=\left|z_C-z_A\right|=\left|-1+2i-(-2-i)\right|=\left|1+3i\right|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$.
Donc AB = AC.

2) $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+3i}{3-i}$$
$$= \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$= \frac{3+i+9i-3}{9+1}$$
$$= \frac{10i}{10} = i$$

$\left(\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{AC}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On en déduit que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

Méthode : Déterminer un ensemble de points

**Vidéo** https://youtu.be/WTXu19XC9Lw

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer et représenter :

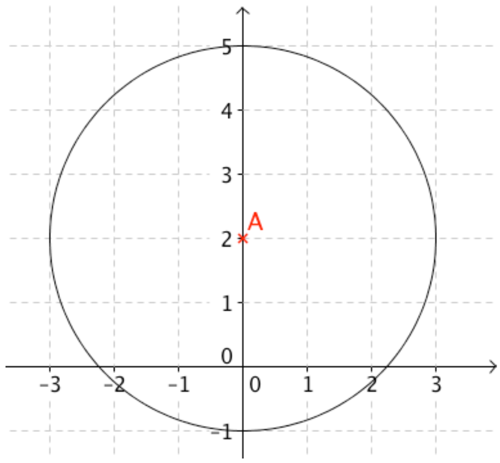
1) L'ensemble des points M tels que $|z-2i| = 3$.

2) L'ensemble des points M tels que $|iz-3| = 1$.

3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z-5|$.

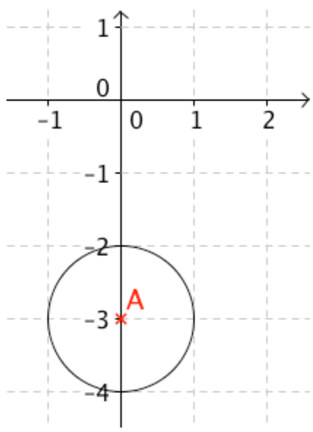
4) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}(\pi)$.

1) Soit A le point d'affixe 2i alors $|z-2i| = 3$ est équivalent à AM = 3.
L'ensemble des points M est le cercle de centre A(2i) et de rayon 3.




2) $|iz-3| = |i(z+3i)| = |i||z+3i| = |z+3i|$

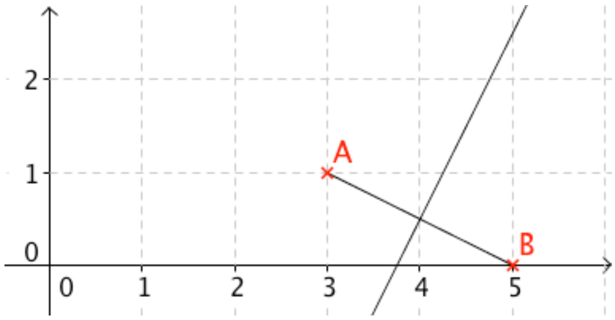
Soit A le point d'affixe -3i alors $|z+3i| = 1$ est équivalent à AM = 1.
L'ensemble des points M est le cercle de centre A(-3i) et de rayon 1.




3) $|\bar{z} - 3 + i| = \left|\overline{\bar{z} - 3 + i}\right| = |\bar{\bar{z}} - 3 - i| = |z-3-i|$

Soit A le point d'affixe 3+i et B le point d'affixe 5 alors $|z-3-i| = |z-5|$ est équivalent à AM = BM.

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB].




4) L'ensemble des points M est la 1ère bissectrice de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées privée de l'origine.